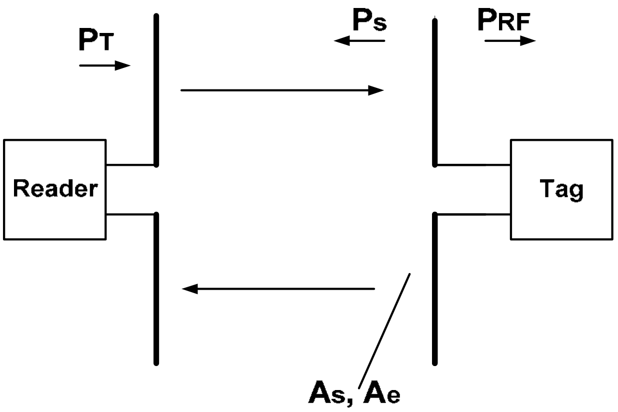
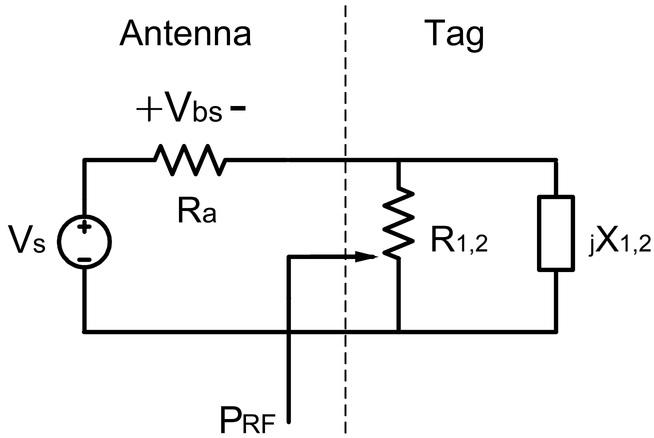
Modulazione della radiazione retrodiffusa

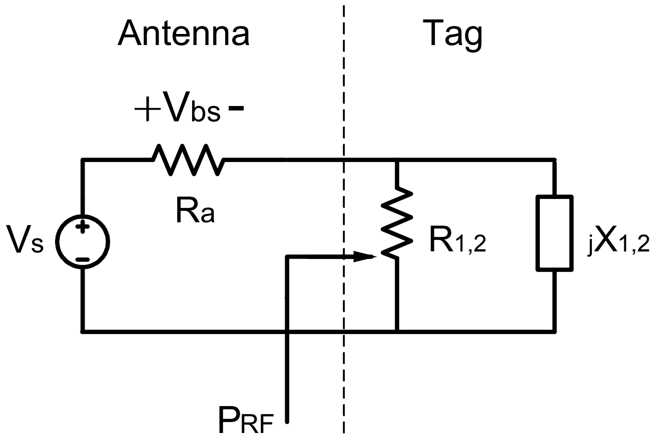
(modulation of the backscattered radiation)





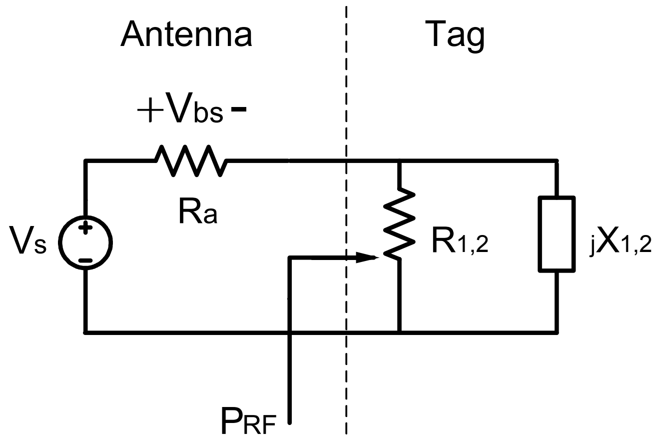
- consiste nel modulare l'impedenza che si vede a valle dell'antenna, in modo da modulare (nello stesso modo) il "backscatter", cioè la parte di radiazione che viene riflessa indietro nella direzione del lettore.
- Supponiamo che la modulazione sia binaria, e quindi che l'impedenza del tag venga modulata tra due valori:
  stato 1: (R1 || jX1)   stato 2: (R2 || jX2)

Modulazione della radiazione retrodiffusa (II)



- R_a: resistenza d'irradiazione dell'antenna (trascuriamo le perdite)
- P_{RF}: potenza assorbita dal tag
- V_{bs}: e' la tensione ai capi di R_a, cioè il segnale che viene re-irradiato, e quindi e' proporzionale al segnale effettivamente ricevuto dal lettore.
- Nel caso di trasponder passivo c'è un tradeoff importantissimo: più profondamente moduliamo la radiazione retrodiffusa, più è alto il rapporto segnale-rumore al ricevitore, ma più disadattiamo l'antenna, e quindi riduciamo il valore di P_{RF} rispetto alla potenza disponibile (compromettendo l'alimentazione del tag).

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa



- L'impedenza vista dall'antenna e' solo resistiva (X1 = X2 → ∞), e nei due stati (1,2) vale R1 o R2.
- Vogliamo che la potenza trasferita al tag sia indipendente dallo stato (1,2):

$$P_{RF1} = P_{RF2} = P_{RF}$$

Abbiamo quindi

$$P_{RF1} = \frac{1}{2}\frac{V_S{}^2 R_1}{(R_1+R_a)^2} = \frac{1}{2}\frac{V_S{}^2 R_2}{(R_2+R_a)^2} = P_{RF2}$$

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (II)

da cui

$$\frac{R_1}{(R_1+R_a)^2} = \frac{R_2}{(R_2+R_a)^2}$$

$$\frac{1}{\left(R_1+2R_a+R_a^2/R_1\right)} = \frac{1}{\left(R_2+2R_a+R_a^2/R_2\right)} \rightarrow \boxed{R_1 R_2 = R_a^2}$$

possiamo scrivere, con N positivo:

$$R_1 = R_a/N \quad \text{e} \quad R_2 = NR_a$$

quindi P_{RF} si puo' esprimere in funzione di R_a e N:

$$P_{RF} = \frac{1}{2}V_S{}^2\frac{NR_a}{(NR_a+R_a)^2} = \frac{1}{2}\frac{V_S{}^2}{R_a}\frac{N}{(N+1)^2}$$

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (III)

- Supponendo che il livello 1 e 2 siano equiprobabili, la potenza media trasferita al tag è

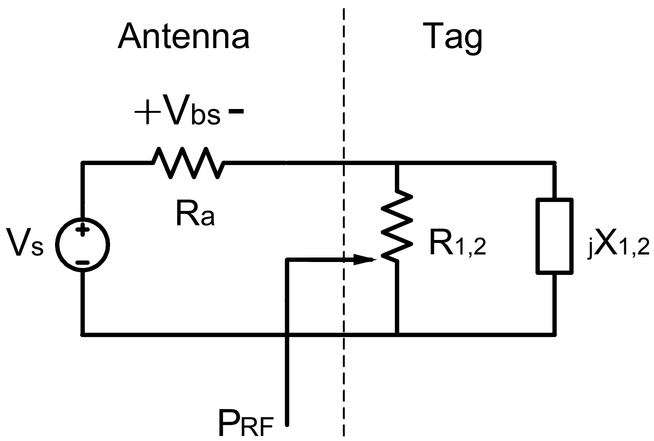
$$\overline{P_{RF}} \equiv \frac{1}{2} P_{RF1} + \frac{1}{2} P_{RF2} = P_{RF} = \frac{1}{2}\frac{V_s^2}{R_a}\frac{N}{(N+1)^2} = P_{AV}\frac{4N}{(N+1)^2}$$

- dove P_{AV} è la potenza disponibile (available), cioè la potenza trasferita al tag in caso di completo adattamento (N = 1).

$$P_{AV} = \frac{1}{8}\frac{V_s^2}{R_a}$$

- Ovviamente, per ogni N, $\overline{P_{RF}} \le P_{AV}$

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (IV)



- La tensione V_{bs} ai capi di R_a è proporzionale al segnale ricevuto
- Nello stato 1 abbiamo

$$V_{bs1} = \frac{V_s R_a}{R_1 + R_a} = \frac{V_s R_a}{R_a / N + R_a} = \frac{N V_s}{1+N}$$

- Nello stato 2:

$$V_{bs2} = \frac{V_s R_a}{R_2 + R_a} = \frac{V_s R_a}{N R_a + R_a} = \frac{V_s}{1+N} = \frac{V_{bs1}}{N}$$

- Quindi V_{bs} è modulato in ampiezza (fase costante) tra due livelli V_{bs1} e V_{bs2}. La profondità di modulazione è

$$m \equiv \frac{V_{bs2} - V_{bs1}}{V_{bs2} + V_{bs1}} = \frac{N-1}{N+1}$$

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (V)

- Possiamo ora calcolare la potenza utile P_u, che definiamo come la potenza che dissipa su Ra la differenza tra la V_{bs} effettiva e la V_{bs} che si ha quando si trasmette informazione nulla (cioè sempre lo stesso stato).

$$P_u = \frac{1}{R_a} < \left(v_{bs}(t) - V_{bs1}\right)^2 > \frac{1}{R_a}\left[P_{\text{stato2}}\frac{1}{2}\left(V_{bs2} - V_{bs1}\right)^2 + P_{\text{stato1}}\frac{1}{2}\left(V_{bs1} - V_{bs1}\right)^2\right]$$

- Vedremo più avanti il rapporto S/N al ricevitore sarà funzione monotona crescente di P_u. Se i due stati sono equiprobabili abbiamo

$$P_u = \frac{1}{R_a}\frac{\left(V_{bs2} - V_{bs1}\right)^2}{4} = \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 \frac{V_S{}^2}{4R_a} = 2P_{AV}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2$$

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (VI)

- Possiamo riscrivere P_{RF} e P_u in funzione del solo

$$m = \frac{N-1}{N+1}$$

- abbiamo:

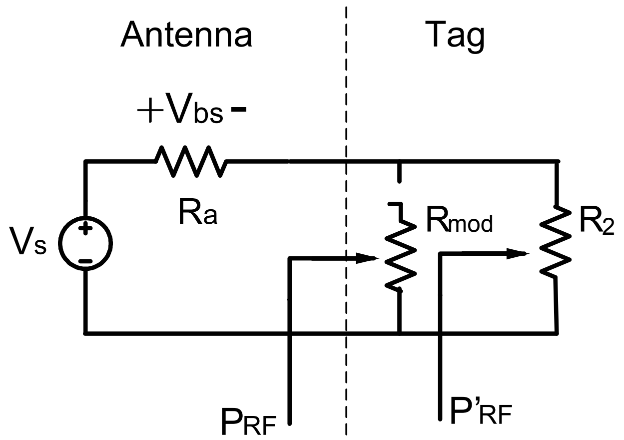
$$P_u = 2P_{AV}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 = 2m^2 P_{AV}$$

$$\overline{P_{RF}} = P_{AV}\frac{4N}{(N+1)^2} = P_{AV}\left[\frac{N^2+2N+1}{(N+1)^2} - \frac{N^2-2N+1}{(N+1)^2}\right] = P_{AV}(1-m^2)$$

- è evidente il compromesso:
  - se aumentiamo m, aumenta P_u ☺ , ma diminuisce P_{RF} ☹

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (VII)

- Poniamo che sia $R_1 < R_2$. Dal punto di vista circuitale, la modulazione della resistenza vista dall'antenna si in pratica aggiungendo o rimuovendo una resistenza Rmod in parallelo a R_2, in modo che $R_1 = R_2 || R_{mod}$. Deve essere:



$$R_{mod} = \frac{R_a^2 R_2}{R_2^2 - R_a^2}$$

- R_2 è la resistenza equivalente del vero tag, mentre R_{mod} viene usata solo per la modulazione. La resistenza realmente assorbita dal tag nello stato 1 è quindi P'_{RF}

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (VIII)

- Abbiamo

$$P'_{RF1} = \frac{V_S^2}{2} \frac{R_1}{(R_1 + R_a)^2} \frac{R_{mod}}{R_2 + R_{mod}} = \frac{V_S^2}{2R_a} \frac{1}{N(1+N)^2} = \frac{4P_{AV}}{N(1+N)^2}$$

- e quindi

$$P_{RF} = \frac{1}{2} P_{RF2} + \frac{1}{2} P'_{RF1} = \frac{1}{4} \frac{V_S^2}{R_a} \left[\frac{N}{(1+N)^2} + \frac{1}{N(1+N)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{V_S^2}{R_a} \frac{N^2+1}{N(1+N)^2} = \frac{1}{8} \frac{V_S^2}{R_a} \frac{(N+1)^2 + (N-1)^2}{N(1+N)^2} = P_{AV} \frac{1}{N} \left[1 + m^2 \right]$$

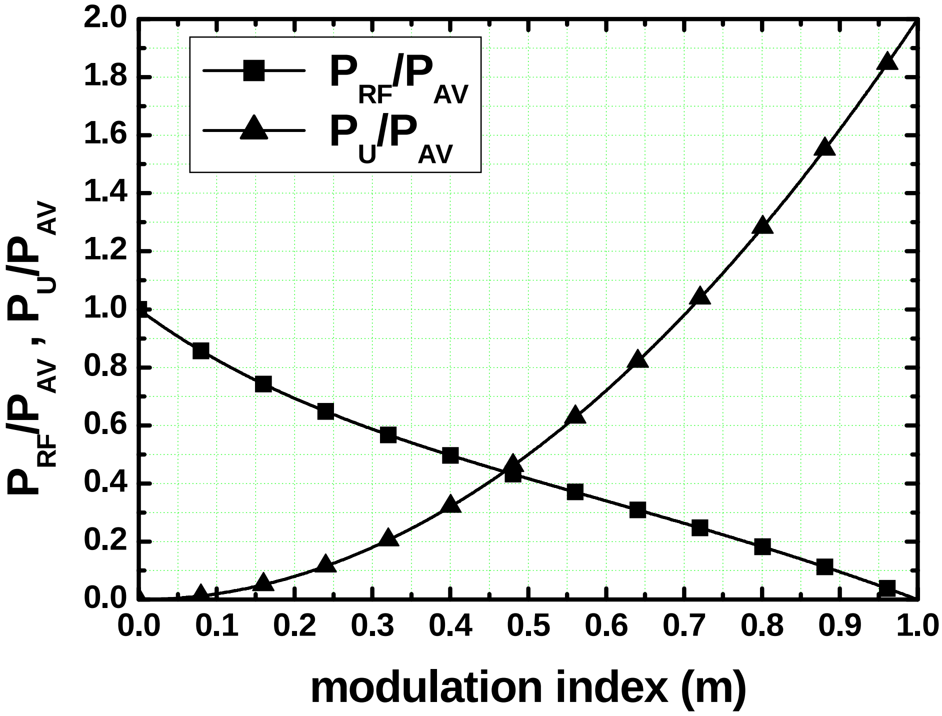
- notiamo che

$$m = \frac{N-1}{N+1} \rightarrow mN + m = N - 1 \rightarrow N = \frac{1+m}{1-m}$$

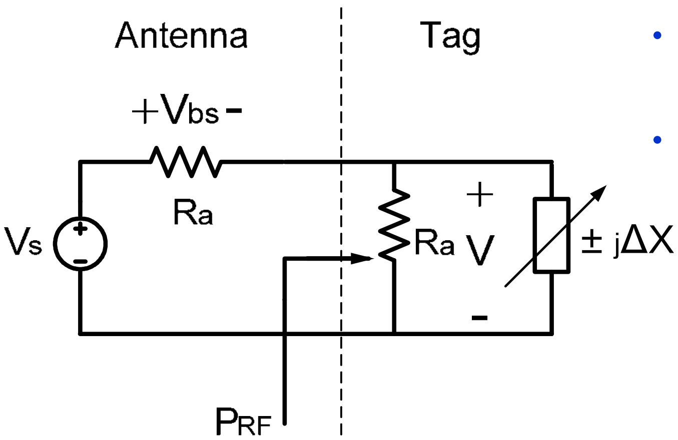
- e infine

$$\boxed{\overline{P_{RF}} = P_{AV} \frac{(1+m^2)(1-m)}{(1+m)}}$$

Modulazione B-ASK della radiazione retrodiffusa (IX)



Modulazione B-PSK della radiazione retrodiffusa (I)



- La parte resistiva dell'ammettenza vista dall'antenna è Ra
- La parte reattiva viene variata tra ±jΔX (varicap o induttanza var.)

$$Y1 = \frac{1}{Ra} + \frac{1}{j\Delta X} \qquad Y2 = \frac{1}{Ra} - \frac{1}{j\Delta X}$$

- In questo modo la potenza assorbita dal carico è uguale nei due stadi

$$V = V_s \frac{\dfrac{\pm jR_a\Delta X}{R_a \pm j\Delta X}}{\dfrac{\pm jR_a\Delta X}{R_a \pm \Delta X} + R_a} = V_s \frac{\pm jR_a\Delta X}{R_a^2 \pm 2jR_a\Delta X} = V_s \frac{\pm j\Delta X}{R_a \pm 2j\Delta X}$$

Giuseppe Iannaccone - 2005

Modulazione B-PSK della radiazione retrodiffusa (II)

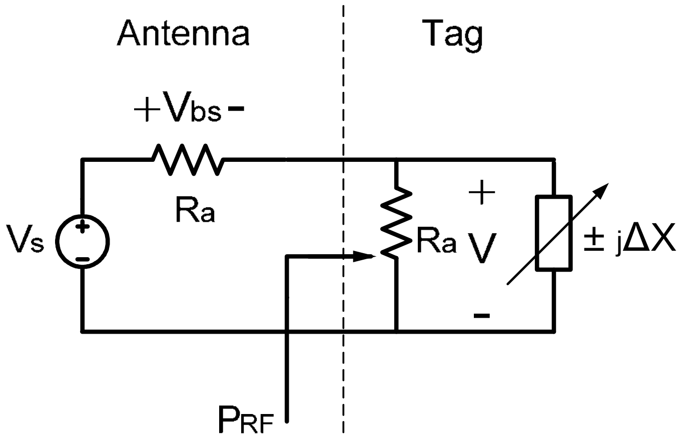
- abbiamo quindi

$$P_{RF} = P_{RF1} = P_{RF2} = \frac{V^2}{2R_a} = \frac{Vs^2}{2Ra}\frac{\Delta X^2}{Ra^2 + 4\Delta X^2} = P_{AV}\frac{4\Delta X^2}{Ra^2 + 4\Delta X^2}$$

$$\overline{PRF} \equiv PIN = \frac{1}{2}PRF1 + \frac{1}{2}PRF2 = P_{AV}\frac{4\Delta X^2}{Ra^2 + 4\Delta X^2}$$

- se definiamo ϕ come: $\phi \equiv \arctan\left(\frac{2\Delta X}{R_a}\right)$
- abbiamo $\overline{PRF} = P_{AV}\sin^2(\phi)$

Modulazione B-PSK della radiazione retrodiffusa (III)



- Calcoliamo i due livelli V_{bs1} e V_{bs2}

$$V_{bs1} = V_s \frac{R_a}{\dfrac{+jR_a\Delta X}{R_a + j\Delta X} + R_a} =$$

$$= V_s \frac{R_a(R_a + j\Delta X)}{R_a^2 + 2jR_a\Delta X} = V_s \frac{R_a + j\Delta X}{R_a + 2j\Delta X}$$

$$V_{bs2} = V_s \frac{R_a}{\dfrac{-jR_a\Delta X}{R_a - j\Delta X} + R_a} = V_s \frac{R_a(R_a - j\Delta X)}{R_a^2 - 2jR_a\Delta X} = V_s \frac{R_a - j\Delta X}{R_a - 2j\Delta X}$$

- V_{bs1} e V_{bs2} sono complessi coniugati.

Modulazione B-PSK della radiazione retrodiffusa (IV)

- calcoliamo la fase di V_{bs1}

$$\angle V_{bs1} = \angle\left(\frac{R_a + j\Delta X}{R_a + 2j\Delta X}\right) = \angle\left(\frac{(R_a + j\Delta X)(R_a - 2j\Delta X)}{R_a^2 + 4\Delta X^2}\right) =$$

$$= \angle\left[\frac{R_a^2 + 2\Delta X^2 - jR_a\Delta X}{R_a^2 + 4\Delta X^2}\right] = -\arctan\left(\frac{R_a\Delta X}{R_a^2 + 2\Delta X^2}\right) \equiv -\theta$$

$$V_{bs1} = V_s\sqrt{\frac{R_a{}^2 + \Delta X^2}{R_a{}^2 + 4\Delta X^2}}e^{-j\theta} \qquad V_{bs2} = V_s\sqrt{\frac{R_a{}^2 + \Delta X^2}{R_a{}^2 + 4\Delta X^2}}e^{j\theta}$$

- in questo caso la potenza utile deve essere calcolata tenendo conto che V_{bs1} e V_{bs2} sono fasori

$$Pu = \frac{1}{Ra} < \left(v_{bs}(t) - \dot{V}_{bs1}\right)^2 > \frac{1}{Ra}\left[P_{\text{stato2}}\frac{1}{2}\left(\dot{V}_{bs2} - \dot{V}_{bs1}\right)^2 + P_{\text{stato1}}\frac{1}{2}\left(\dot{V}_{bs1} - \dot{V}_{bs1}\right)^2\right]$$

Modulazione B-PSK della radiazione retrodiffusa (IV)

- in questo caso la potenza utile deve essere calcolata tenendo conto che V_{bs1} e V_{bs2} sono fasori

$$Pu = \frac{1}{Ra} < \left(v_{bs}(t) - \dot{V}_{bs1}\right)^2 > \frac{1}{Ra}\left[P_{\text{stato2}}\frac{1}{2}\left|\dot{V}_{bs2} - \dot{V}_{bs1}\right|^2 + P_{\text{stato1}}\frac{1}{2}\left|\dot{V}_{bs1} - \dot{V}_{bs1}\right|^2\right]$$

- nota che

$$\dot{V}_{bs2} - \dot{V}_{bs1} = V_s\left[\frac{R_a - j\Delta X}{R_a - 2j\Delta X} - \frac{R_a + j\Delta X}{R_a + 2j\Delta X}\right] =$$

$$= V_s\left[\frac{\left(R_a^2 - jR_a\Delta X + 2jR_a\Delta X + 2\Delta X^2\right) - \left(R_a^2 + jR_a\Delta X - 2jR_a\Delta X + 2\Delta X^2\right)}{R_a^2 + 4\Delta X^2}\right] = V_s\left[\frac{2jR_a\Delta X}{R_a^2 + 4\Delta X^2}\right]$$

- se gli stati sono equiprobabili otteniamo

$$P_u = \frac{V_s^2}{4R_a}\frac{4R_a^2\Delta X^2}{\left(R_a^2 + 4\Delta X^2\right)^2} = 2P_{AV}\sin^2\phi\cos^2\phi$$

Modulazione B-PSK della radiazione retrodiffusa (V)

- Esprimiamo P_{RF} e P_u in funzione del coefficiente di riflessione così definito:

$$\rho = \frac{Z_{1,2} - Z_a^*}{Z_{1,2} + Z_a}, \quad \text{dove} \qquad Z_1 = \frac{j\Delta X R_a}{R_a + j\Delta X} \qquad Z_2 = \frac{-j\Delta X R_a}{R_a - j\Delta X}$$

abbiamo quindi

$$\rho_1 = \frac{\dfrac{j\Delta X R_a}{R_a + j\Delta X} - R_a}{\dfrac{j\Delta X R_a}{R_a + j\Delta X} + R_a} = \frac{jR_a\Delta X - R_a^2 - jR_a\Delta X}{jR_a\Delta X + R_a^2 + jR_a\Delta X} = -\frac{R_a}{R_a + j2\Delta X}$$

$$\rho_2 = -\frac{R_a}{R_a - j2\Delta X}$$

chiamiamo

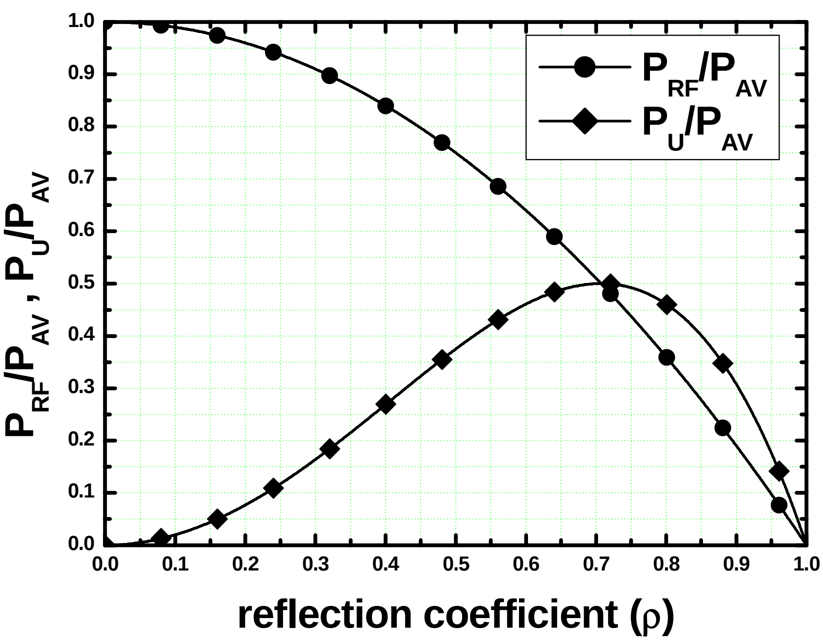
$$\rho \equiv |\rho_1| = |\rho_2| \quad \rightarrow \quad \boxed{1 - \rho^2 = \frac{4\Delta X^2}{R_a^2 + 4\Delta X^2}}$$

Modulazione B-PSK della radiazione retrodiffusa (V)

- abbiamo $$\overline{P_{RF}} = P_{AV}\frac{4\Delta X^2}{R_a^2 + 4\Delta X^2} = P_{AV}\left(1 - \rho^2\right)$$

$$P_u = \frac{V_s^2}{4R_a}\frac{4R_a^2\Delta X^2}{\left(R_a^2 + 4\Delta X^2\right)^2}$$

$$= 2P_{AV}\rho^2\left(1 - \rho^2\right)$$



Confronto tra le modulazioni ASK e PSK (I)

- Mostriamo P_u e P_{RF} in funzione del coefficiente di riflessione nei due casi
- Nel caso ASK il modulo del coefficiente di riflessione è proprio m

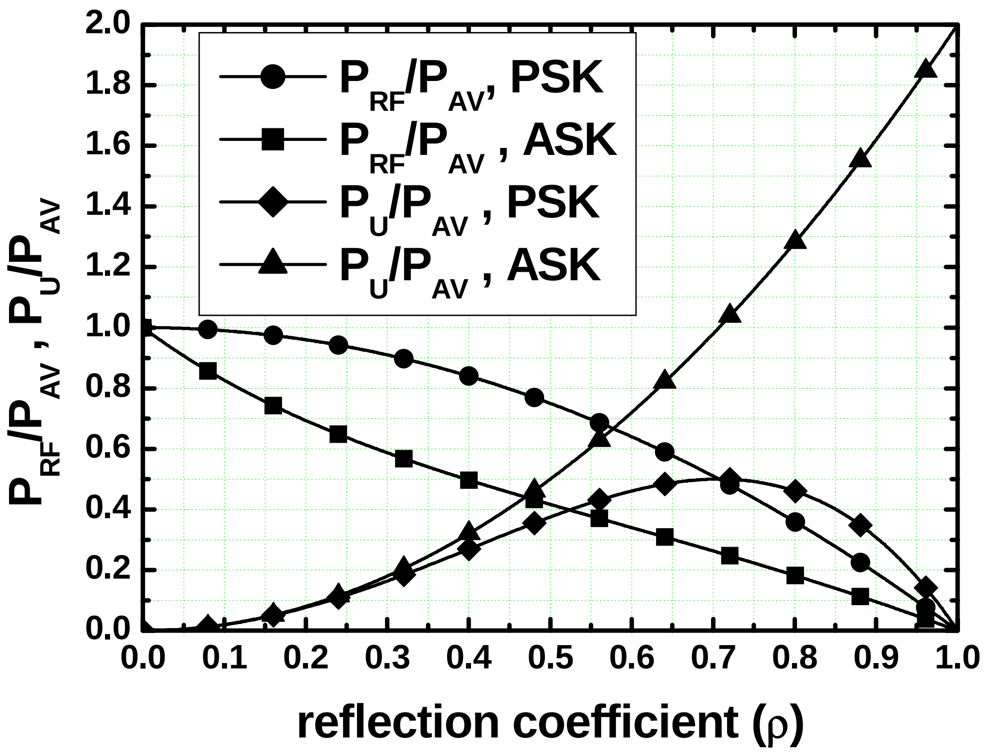
$$\rho = \rho_{1,2\,ASK} \equiv \frac{R_{1,2} - R_a}{R_{1,2} + R_a} = \frac{NR_a - R_a}{NR_a + R_a} = \frac{N-1}{N+1} = m$$

- quindi abbiamo

$$\overline{P_{RF,ASK}} = P_{AV} \frac{\left(1+\rho^2\right)(1-\rho)}{(1+\rho)} \qquad P_{u,ASK} = 2\rho^2 P_{AV}$$

$$\overline{P_{RF\_PSK}} = P_{AV}\left(1-\rho^2\right) \qquad P_{u,PSK} = 2P_{AV}\rho^2\left(1-\rho^2\right)$$

Confronto tra le modulazioni ASK e PSK (II)

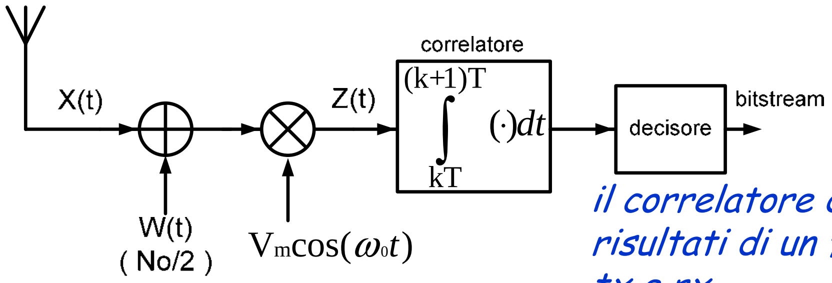


ASK - Probabilità di errore in ricezione

- associamo allo stato 2 (V_{bs2}) lo "1" logico e allo stato 1 (V_{bs1}) lo "0" logico.
- Immaginiamo che il segnale sia ricevuto, demodulato e riportato in banda base. Il segnale in banda base sia $V=V_1$ se $V_{bs}=V_{bs2}$, e $V=V_0$ se $V_{bs}=V_{bs1}$.
- Abbiamo

$$m \equiv \frac{V_{bs2} - V_{bs1}}{V_{bs2} + V_{bs1}} = \frac{V_1 - V_0}{V_1 + V_0}$$

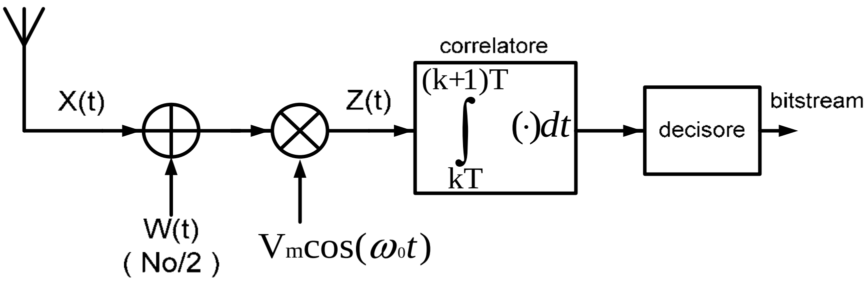
- lo schema a blocchi semplificato del ricevitore è



il correlatore da' gli stessi risultati di un filtro adattato in tx e rx

- W gaussiano, bianco, a media nulla

ASK-Probabilità di errore in ricezione (II)



$$x(t) = \sum_i V_i \, rect\left(\frac{t - T/2 - iT}{T}\right)\cos(\omega_0 t)$$

- T tempo di bit
- k costante del mixer

$$z(t) = n(t) + kV_m \sum_i V_i \, rect\left(\frac{t - T/2 - iT}{T}\right)\cos^2(\omega_0 t)$$

$$n(t) = w(t) k V_m \cos(\omega_0 t)$$

- T multiplo di 1/f0

$$\int_{[T]} kV_i V_m \cos^2(\omega_0 t)dt = \frac{kV_i V_m}{2}\int_{[T]}\left[1 + \cos(2\omega_0 t)\right]dt = \frac{k\ V_i\ V_m\ T}{2}$$

ASK-Probabilità di errore in ricezione (III)

- w è bianco

$$E\{w(t_1)w(t_2)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}k^2 V_m^2 \int_0^T \int_0^T \delta(t_2 - t_1)\cos(\omega_0 t_1)\cos(\omega_0 t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2}k^2 V_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{N_0}{2}k^2 V_m^2 \frac{1}{2}\int_0^T [1 + \cos(2\omega_0 t)] dt = \frac{N_0}{4}k^2 V_m^2 T$$

- Se si è ricevuto un "1" logico in ingresso al decisore si ha

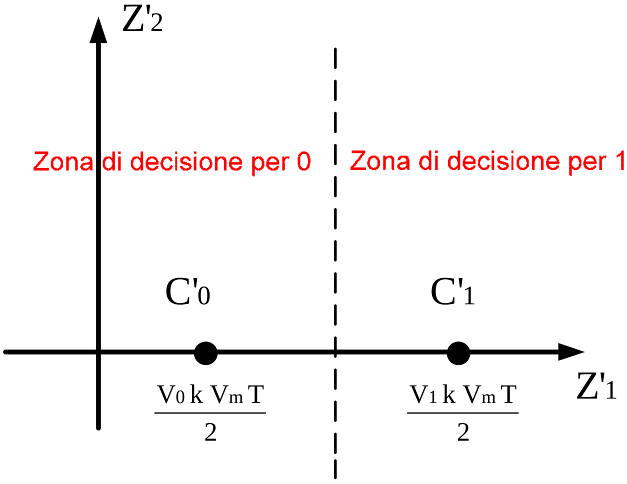
$$Z|_1 = \frac{k\ V_1 V_m\ T}{2} + n$$

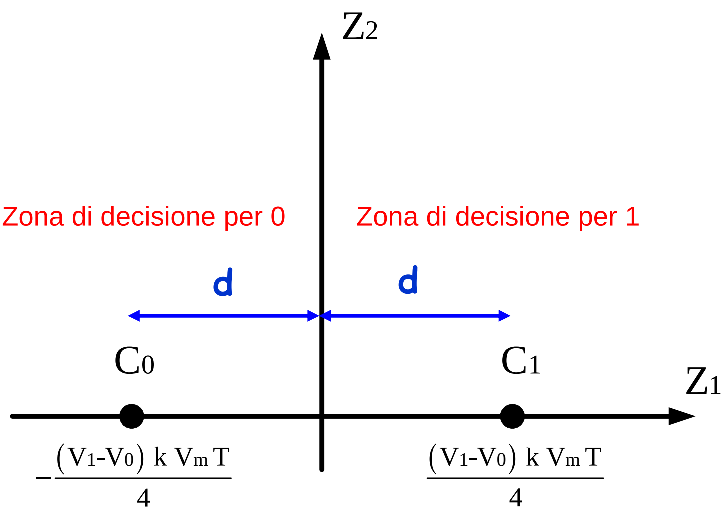
- Se si è ricevuto uno "0" logico:

$$Z|_0 = \frac{k\ V_0 V_m T}{2} + n$$

ASK-Probabilità di errore in ricezione (IV)

- Possiamo rappresentare i simboli in una costellazione
- Per semplificare il calcolo, trasliamo rigidamente la costellazione





ASK-Probabilità di errore in ricezione (V)

- probabilità di errore nel caso sia ricevuto uno "0" (integriamo sul semipiano Z1 >0)

$$P_e|_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{(Z_1+d)^2+Z_2^2}{2\sigma_n^2}\right] dZ_1 dZ_2$$

- dove d= $\frac{(V_1 - V_0)V_m\, k\; T}{4}$; l'integrale sull'asse Z2 fa 1

$$P_e|_0 = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left[-\frac{(Z_1+d)^2}{2\sigma_n^2}\right] dZ_1 = \frac{1}{2}2\int_{\frac{d}{\sqrt{2}\sigma_n}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-Y^2\right)\, dY = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

- abbiamo fatto il cambio di variabili

$$Y = \frac{Z_1+d}{\sqrt{2}\sigma_n} = \frac{Z_1 + \frac{\Delta V\ k\ V_m\, T}{4}}{\sqrt{2}\sigma_n}$$

ASK-Probabilità di errore in ricezione (VI)

- la probabilità di errore nel caso sia ricevuto uno "1" è uguale

$$P_e|_1 = P_e|_0 = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

- Sostituendo le espressioni già calcolate di σ e d

$$P_e|_1 = P_e|_0 = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{(V_1 - V_0)\ k\ V_m\ T}{4\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2}erfc\left((V_1 - V_0)\sqrt{\frac{T}{8N_0}}\right)$$

- al posto di V_1 e V_0 possiamo sostituire la profondità di modulazione

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{2m}{1+m}V_1\sqrt{\frac{T}{8N_0}}\right) = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{m}{1+m}V_1\sqrt{\frac{T}{2N_0}}\right)$$

ASK-Probabilità di errore in ricezione (VII)

- posso esprimere Pe in funzione della potenza massima del segnale (quando trasmetto “1”)

$$P_m\big|_{max} = \frac{V_1^2}{2} \rightarrow \qquad P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{m}{1+m}\sqrt{\frac{P_m\big|_{max}\; T}{N_0}}\right)$$

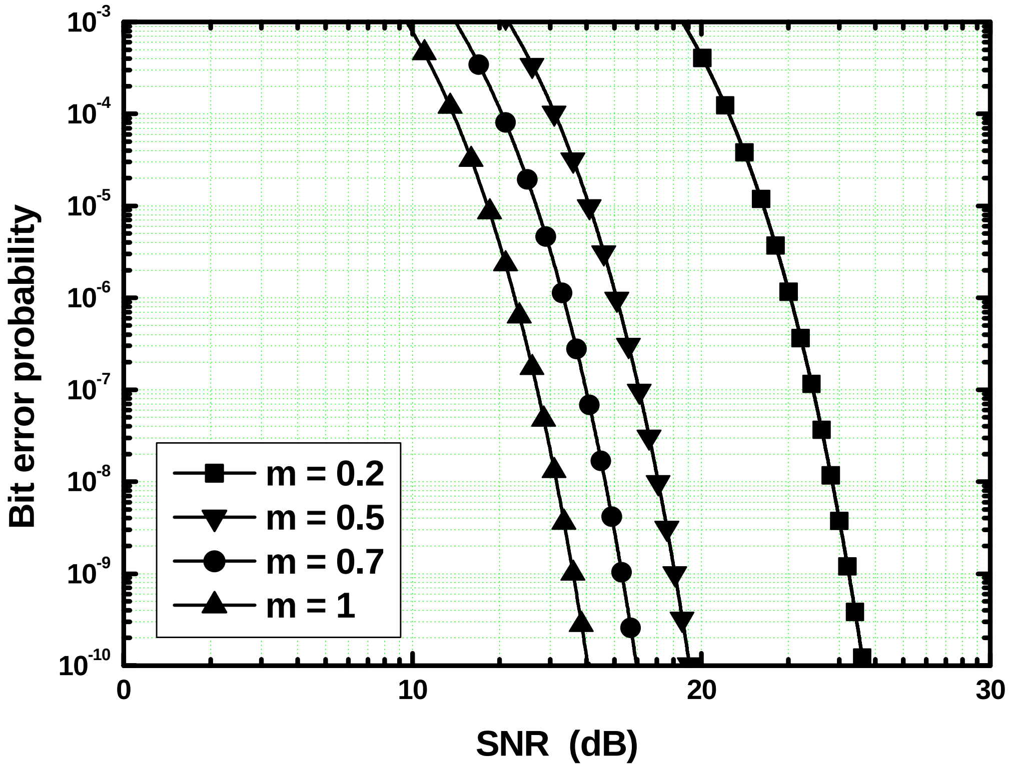
- la potenza del rumore, filtrato su una banda 2/T (lobo principale della Sinc trasformata della Rect di ampiezza T) è

$$P_N = 2\frac{N_0}{T} = 2N_0 f_{DR}$$

- abbiamo quindi:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{m}{1+m}\sqrt{2SNR}\right)$$

ASK-Probabilità di errore in ricezione (VIII)



ASK-Probabilità di errore in ricezione (IX)

- Possiamo esprimere P_e in funzione di una sola "potenza utile", definita come abbiamo già visto:

$$P_u = \langle \left(x(t) - V_0\right)^2 \rangle \left[P_1 \frac{1}{2}\left(V_1 - V_0\right)^2 + P_0 \frac{1}{2}\left(V_0 - V_0\right)^2 \right] = \frac{\left(V_1 - V_0\right)^2}{4}$$

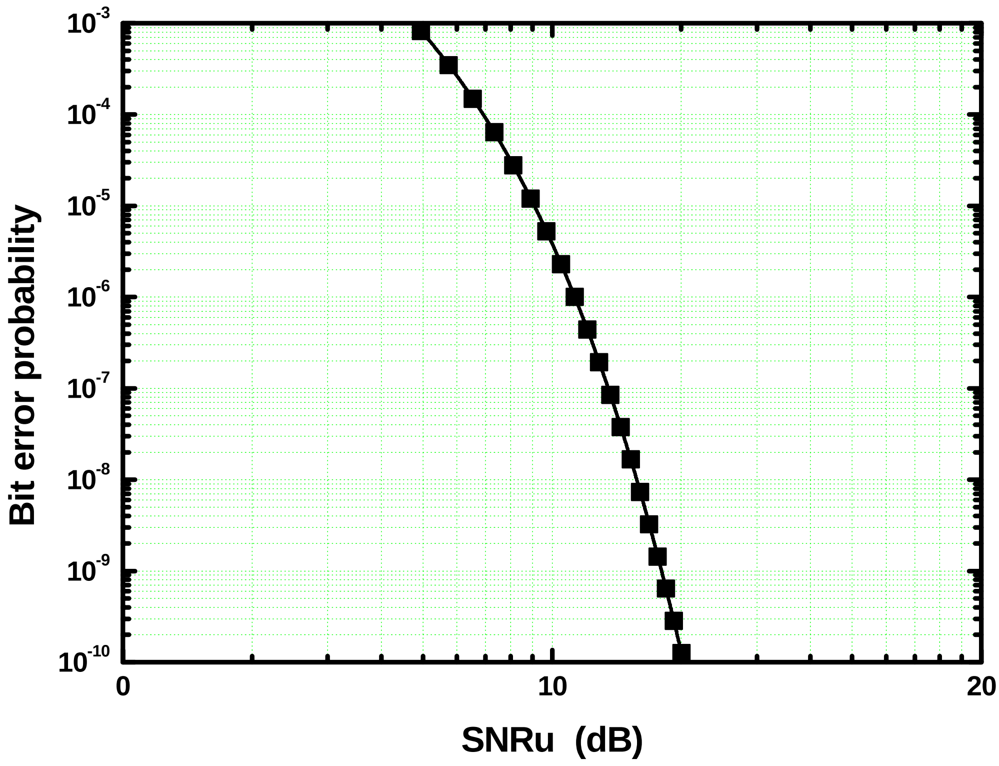
- notare che x(t) e' proporzionale a $v_{bs}(t)$, e quindi la P_u di x è proporzionale alla Pu di v_{bs}. Ottengo

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left((V_1 - V_0)\sqrt{\frac{T}{8N_0}} \right) = \frac{1}{2} erfc\left((V_1 - V_0)\sqrt{\frac{1}{4\,P_N}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{P_u}{P_N}} \right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{SNR_u} \right)$$

- Cioè P_e dipende solo dal rapporto P_u/N

ASK-Probabilità di errore in ricezione (X)



- E' quindi evidente che per minimizzare la probabilità di errore la modulazione dovra' massimizzare l'unico parametro che conta, la Pu.