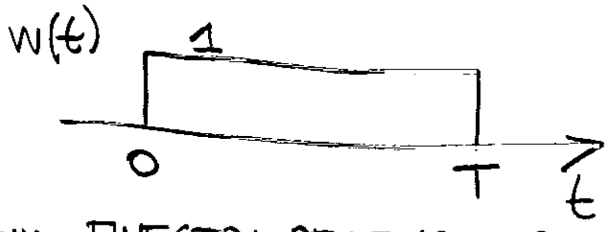
Note sull'impiego delle finestre nei DSA

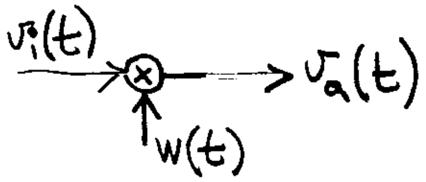
Supponiamo che il segnale da analizzare sia $v_i(t)$ e che $w(t)$ sia la finestra temporale per cui viene moltiplicato il segnale d'ingresso. Nel caso più semplice, se T è l'intervallo di acquisizione, si può avere

$$w(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



in questo caso diciamo che $w(t)$ è una FINESTRA RETTANGOLARE

Il segnale ACQUISITO è $v_a(t) = w(t)\, v_i(t)$



Nel fare la trasformata discreta di Fourier di $v_a(t)$ si assume che $v_a(t)$ sia periodico di periodo T ⇒

se $V_A(f)$ è la trasformata di Fourier di $v_a(t)$ abbiamo

$$V_A(f) = \int V_i(f')\, W(f-f')\, df'$$

se rendiamo $v_a(t)$ periodico di periodo T, lo spettro è costituito da righe a frequenza multipla di $f_0 = 1/T$

$$V_{An}^{n} = V_A(nf_0) = \int V_i(f')\, W(nf_0 - f')\, df' = \quad (1)$$

$$= \int V_i(f')\, W^*(f' - nf_0)\, df' \quad (2)$$

Valutiamo prima l'espressione (1). Supponiamo che il segnale d'ingresso sia una sinusoide di ampiezza A e frequenza f_i: $v_i = A\cos(2\pi f_i t)$

$$\hookrightarrow V_i(f) = \frac{A}{2}\delta(f-f_i) + \frac{A}{2}\delta(f+f_i)$$

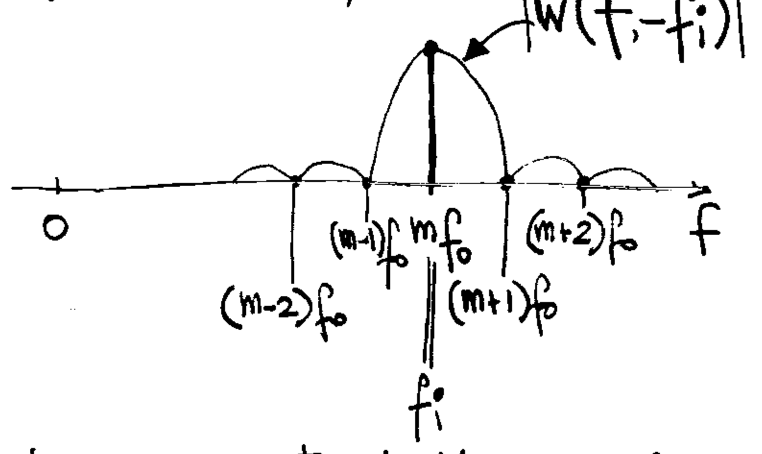
Sostituendo in (1) abbiamo

$$V_A^n = \frac{A}{2}\left[\int\left[\delta(f'-f_i)+\delta(f'+f_i)\right]W(nf_0-f')\,df'\right] =$$

$$\boxed{V_A^n = \frac{A}{2}W(nf_0-f_i) + \frac{A}{2}W(nf_0+f_i)}$$

Supponiamo che w sia la finestra rettangolare, e consideriamo 2 casi

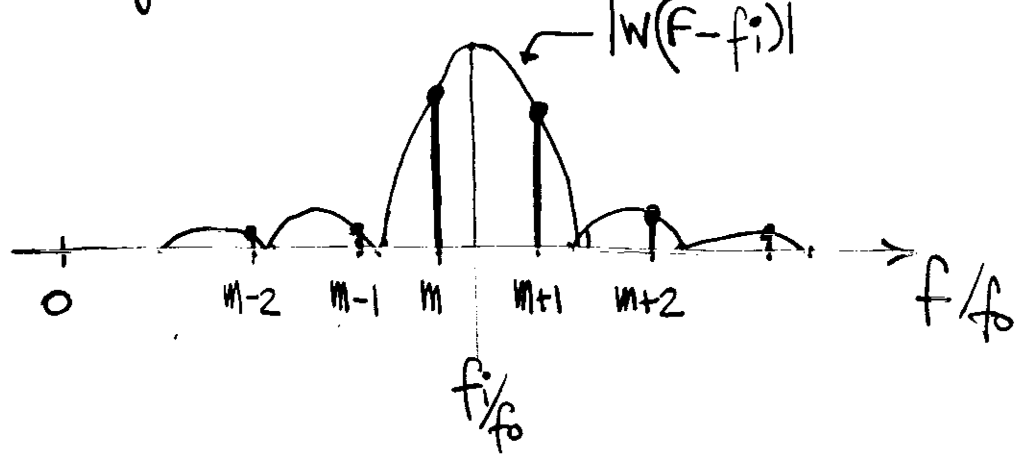
1) f_i multiplo di f_0 ($f_i = mf_0$, m intero), cioè il periodo del segnale è sottomultiplo del tempo di acquisizione. In questo caso, la finestra non modifica il segnale da acquisire W(f) è una sinc,



(Vediamo lo spettro solo per f positive).

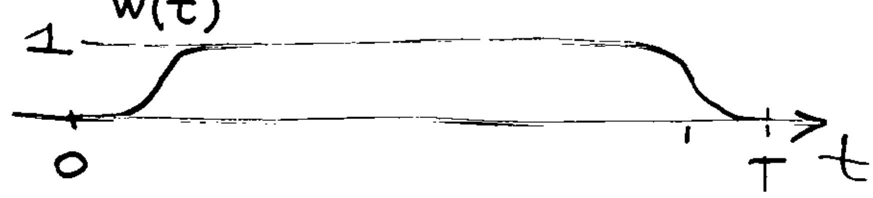
l'unica componente di V_A non nulla è la m-esima. Tutte le altre cadono in corrispondenza dei nodi della sinc. Lo spettro del segnale acquisito è uguale allo spettro del segnale di ingresso.

3) se f_i non è multiplo di f_0, l'uso di una finestra rettangolare introduce artefatti. Lo spettro è:

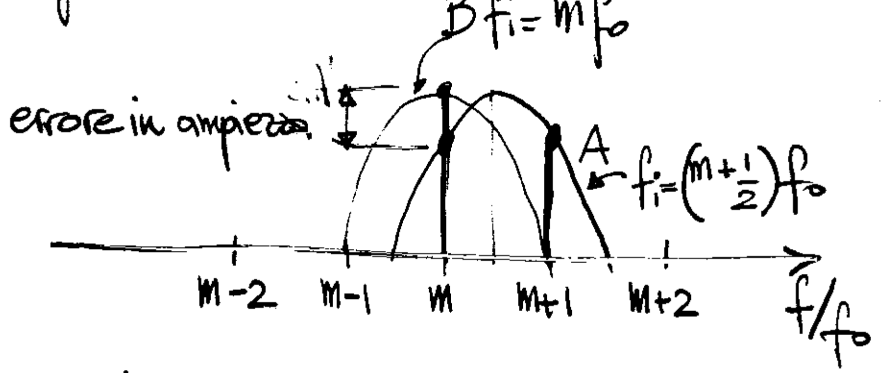


In questo caso sono molte le righe di ampiezza non nulla. L'ampiezza delle righe va a zero molto lentamente quando la frequenza si allontana da f_i, perchè i lobi della sinc tendono a zero molto lentamente. Si ha quindi il cosidetto "leakage" dello spettro.

Per eliminare questo problema si deve usare una finestra con lobi laterali molto soppressi, come ad esempio la finestra di Hanning. Non vediamo l'espressione analitica, ma la finestra di Hanning ha un lobo laterale + largo e lobi laterali fortemente soppressi. L'andamento nel tempo è qualitativamente



L'errore in ampiezza (cioè, nel determinare l'ampiezza di una sinusoide in ingresso) è massimo quando la frequenza f_i è uguale a $\left(m+\frac{1}{2}\right)f_0$. In questo caso si hanno 2 righe di ampiezza uguale e minore dell'ampiezza effettiva della riga:



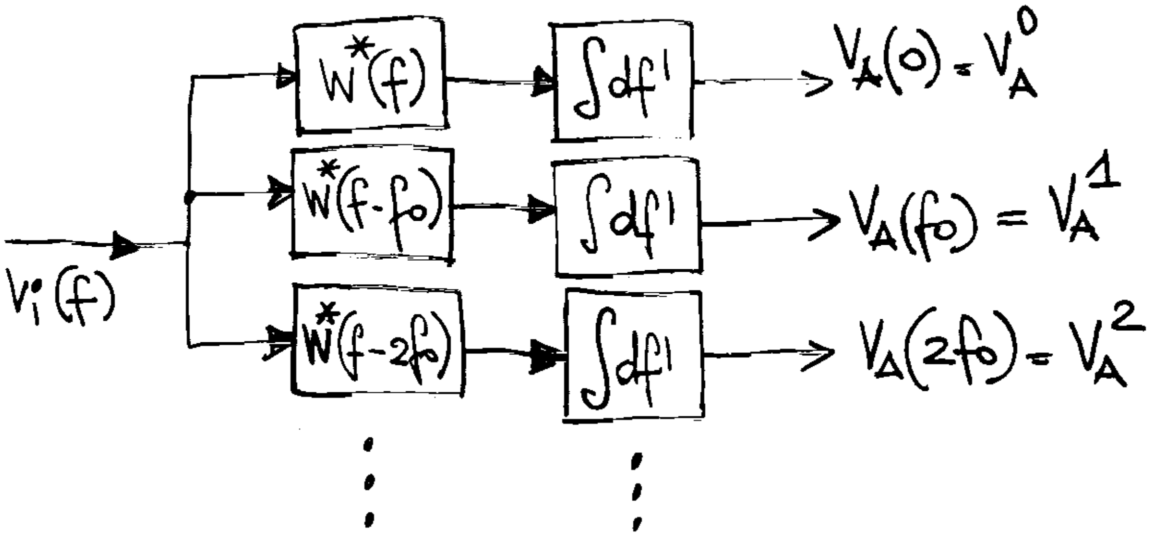
(trascuriamo per il momento i lobi laterali)

si può vedere che, considerando solo il lobo principale,
se $f_i = \left(m+\frac{1}{2}\right)f_0$ [caso A] abbiamo 2 righe di pari ampiezza,
se $f_i = m f_0$ [caso B] abbiamo 1 riga di ampiezza ben maggiore.
L'errore in ampiezza, in questo caso, con la finestra rettangolare è di 4dB, con la finestra di Hanning di 1,5 dB.

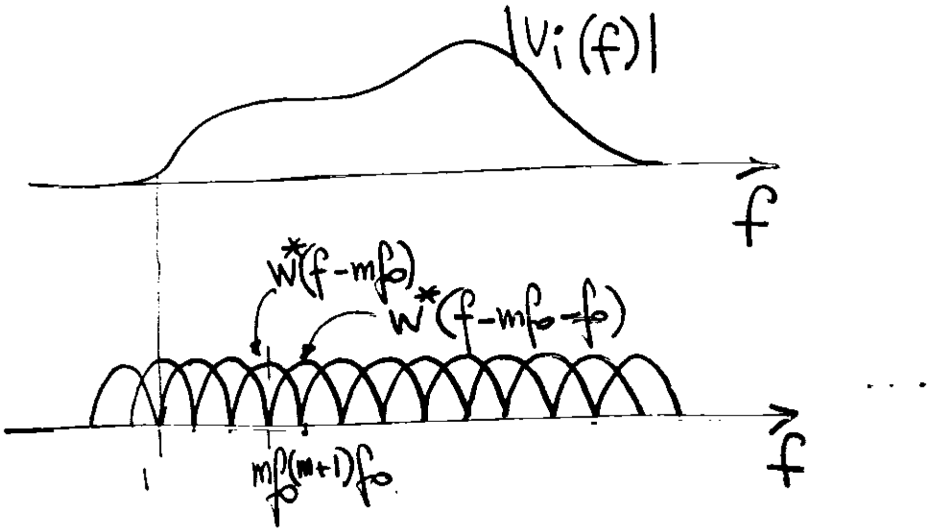
Per minimizzare l'errore in ampiezza si può usare una finestra FLAT-TOP, che ha il lobo principale più largo ma piatto intorno al picco, cosicché l'errore in ampiezza è ridotto a 0,01 dB

L'accuratezza in ampiezza si paga con un lobo molto largo, e quindi una peggiore risoluzione in frequenza.

L'espressione (2) consente una interpretazione complementare dell'uso delle finestre. La (2) si traduce direttamente nel seguente schema a blocchi:



La riga m-esima dello spettro si ottiene prendendo il segnale d'ingresso, filtrandolo con una funzione di trasferimento uguale alla trasformata di Fourier della finestra centrata a frequenza mf_0, estraendo l'integrale in frequenza dello spettro. In altre parole, possiamo dire che il segnale d'ingresso viene filtrato da una batteria di filtri passabanda, ciascuno centrato in corrispondenza di un multiplo di f_0, e con una funzione di trasferimento uguale alla trasformata di Fourier della finestra.

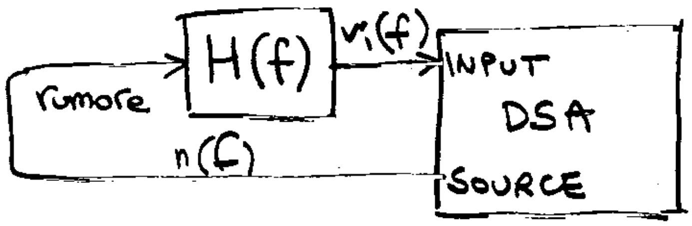


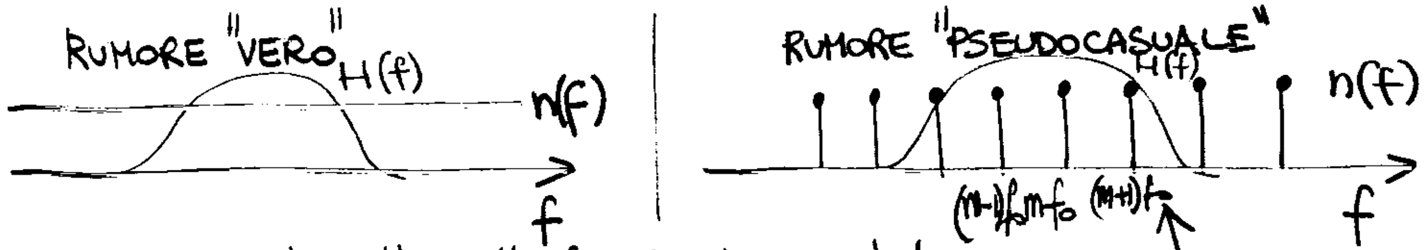
Si deduce che la risoluzione in frequenza del DSA è proporzionale (e circa =) all'ampiezza del lobo principale.

Misura della fdt di un sistema a 2 porte con un DSA.

Lo strumento di solito fornisce 2 sorgenti di rumore

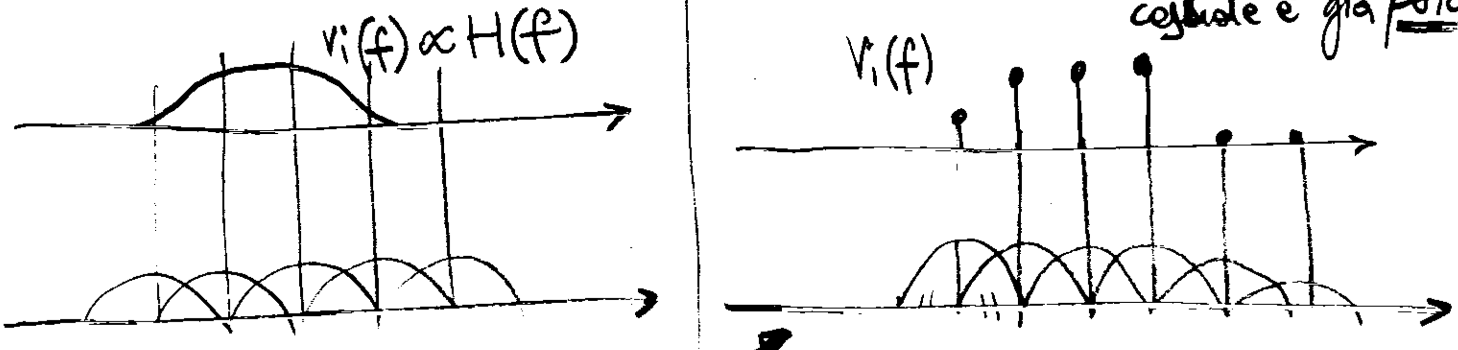
- un rumore "vero", cioè un segnale casuale con densità spettrale di potenza BIANCA (cioè, uniforme)
- un rumore "pseudocasuale" (PSEUDORANDOM NOISE) cioè un segnale DETERMINISTICO, ottenuto da una sequenza di campioni contenuta in memoria, periodico di periodo T, e con densità spettrale di potenza uniforme.





densità spettrale di potenze del rumore

il rumore pseudo casuale è già periodico



il pettine di filtri corrispondente all'operazione del DSA

all'ingresso di ogni filtro entra praticamente solo una riga.

SE il sistema è lineare, il rumore PSEUDOCASUALE è più conveniente, perché va a regime PRIMA (il segnale è deterministico, quindi non bisogna mediare nel tempo per avere un'informazione significativa dal punto di vista statistico, e il tempo necessario per la misura è T) e ha una risoluzione migliore (NON viene fatta la convoluzione tra $H(f)$ e $W(f)$).

SE il sistema presenta distorsioni NON LINEARI, il rumore pseudocasuale dà problemi, vediamo perché.

Se mandiamo 2 sinusoidi, a frequenze f_1 e f_2 all'ingresso di un sistema che presenta distorsioni non lineari <u>senza memoria</u> (il caso più semplice) abbiamo in uscita componenti frequenziali aggiuntive

$$v_u = a_1 v_i + a_2 v_i^2 + a_3 v_i^3 + \dots$$

se $v_i = A\cos(2\pi f_1 t) + B\cos(2\pi f_2 t)$

→ il termine del 1° ordine $(a_1 v_i)$ conterrà componenti frequenziali a frequenze f_1 e f_2

→ il termine del 2° ordine $(a_2 v_i^2)$ conterrà componenti a frequenze $\varnothing$, $2f_1$, $2f_2$ (prodotti di intermodulazione del 2° ordine)

→ il termine del 3° ordine ($a_3 v_i^3$) conterrà componenti a frequenze $f_1, f_2, 2f_1+f_2, 2f_1-f_2, 2f_2-f_1, 2f_2+f_1$ (prodotti di intermodulazione del 3° ordine)

i termini $2f_1-f_2$ e $2f_2-f_1$ sono i più fastidiosi

infatti, se $f_1 = m f_0$ e $f_2 = (m+1) f_0$

abbiamo che $2f_1-f_2 = (m-1) f_0$ e

$$2f_2-f_1 = (m+2) f_0$$

cioè i prodotti di intermodulazione del 3° ordine si sommano a 2 righe dello spettro del segnale pseudocasuale, alterando lo spettro di $V_i(f)$.

La cosa è particolarmente grave per il segnale pseudocasuale, perchè è deterministico, e quindi non serve a niente fare medie nel tempo. Nel caso di rumore "vero", invece, le distorsioni hanno una fase completamente casuale, per cui facendo una media nel tempo sufficientemente lunga il loro effetto può essere ridotto a piacere.