

Rappresentazione dei Numeri

Esercizi risolti

a cura del professor Marco Cococcioni

Versione 0.14

Esercizio 1

Sia A il naturale che rappresenta l'intero $a = -31$ in complemento a due su 6 bit. Trovare A , esprimendolo in binario. Successivamente trovarne anche la rappresentazione in base 16.

A (espresso in binario)

A (espresso in base 16) _____

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 1

La rappresentazione cercata è data dal naturale $2^6 - ABS(-31) = 64 - 31 = 33$, ossia $2^5 + 2^0$: 100001.

Il naturale 33 in base sedici ha rappresentazione 21, come si può facilmente scoprire raggruppando le cifre di quattro in quattro da destra ed aggiungendo 2 zeri a sinistra:

0010-0001

$\underbrace{\hspace{2em}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}$
2 1

Ovviamente, si sarebbe giunti alla stessa soluzione, applicando l'algoritmo Div&Mod al naturale 33 ed usando come base 16:

$$q_0 = 33$$

$$q_1 = 33 \text{ div } 16 = 2 \quad a_0 = 33 \text{ mod } 16 = 1$$

$$q_2 = 2 \text{ div } 16 = 0 \quad a_1 = 2 \text{ mod } 16 = 2$$

Pertanto, ancora, il naturale 33 in base 16 ha rappresentazione $(21)_{16}$ (e si legge due uno in base sedici).

Esercizio 2

Data la rappresentazione $\mathbf{A} = 01101$, dire a quale intero \mathbf{a} essa corrisponde nell'ipotesi di aver utilizzato la rappresentazione con *bias* su 5 bit.

Inoltre, data la rappresentazione $\mathbf{R} = \{0, 01101, 1000000000\}$, trovare il numero reale \mathbf{r} corrispondente nell'ipotesi di rappresentazione in virgola mobile e precisione dimezzata (*half precision*).

$\mathbf{a} =$ _____	$\mathbf{r} =$ _____
----------------------	----------------------

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 2

Per trovare \mathbf{a} da \mathbf{A} basta togliere ad \mathbf{A} il bias. Il bias vale $2^{K-1}-1$. Per $K=5$, bias = 01111 = 15.
Pertanto $01101-01111 = 13-15 = -2 \Rightarrow$ Pertanto l'intero \mathbf{a} cercato vale -2.

Data $\mathbf{R}=\{0, 01101, 1000000000\}$, si ha che:

$s = 0$ (il numero reale \mathbf{r} cercato è dunque positivo)

$E = 01101$ ed

$F = 1000000000$

La mantissa m sarà pertanto il reale 1.1000000000 (per via dell'1 implicito).

L'esponente $e = -2$, in virtù della rappresentazione con bias (vedere sopra).

Pertanto $\mathbf{r} = m \cdot \text{due}^{-2} = 1.1 \cdot \text{due}^{-2} = 0.011 \cdot \text{due}^0 = 2^{-2} + 2^{-3} = 0.25 + 0.125 = \mathbf{0.375}$.

Esercizio 3

Trovare la rappresentazione di -64 in complemento a due su 7 bit, se rappresentabile. Trovarne inoltre la rappresentazione in modulo e segno, sempre su 7 bit (e sempre al patto che sia rappresentabile).

<input type="checkbox"/> -64 è rappresentabile in <i>c2</i> su 7 bit (<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>)	<input type="checkbox"/> -64 è rappresentabile in <i>ms</i> su 7 bit (<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>)
<input type="checkbox"/> -64 non è rappresentabile in <i>c2</i> su 7 bit	<input type="checkbox"/> -64 non è rappresentabile in <i>ms</i> su 7 bit

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 3

L'intervallo di rappresentabilità in complemento a 2 su 7 bit è $[-2^{(7-1)}, +2^{(7-1)}-1]$, ossia $[-64, +63]$. Pertanto -64 è rappresentabile. La sua rappresentazione A è data da $2^7-64 = 128-64 = 64$, ossia **1000000**.

Invece l'intervallo di rappresentabilità in modulo e segno su 7 bit è $[-2^{(7-1)}-1, +2^{(7-1)}-1]$, ossia $[-63, +63]$ e di conseguenza -64 **non è rappresentabile in modulo e segno su 7 bit**.

Esercizio 4

Dara la rappresentazione in virgola mobile $R=\{s,F,E\}$, dove $s=1$, $F=01000$ (mantissa su 5 bit) ed $E=010$ (esponente su 3 bit), a quale numero reale r corrisponde?

$r =$ _____

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 4

La mantissa del numero è 1.01000 per via dell'*uno implicito*.

Il numero r in base due è $1.01000 \cdot \text{due}^{-1}$, ossia 0.101000 , che in base dieci vale $2^{-1} + 2^{-3} = 0.5 + 0.125$, da cui segue che $r = \mathbf{-0.625}$.

Esercizio 5

Trovare la rappresentazione binaria **A** in complemento a 2 dell'intero $\mathbf{a} = -31$ su $p = 6$ bit.

Trovare inoltre la rappresentazione in base 8 del naturale **A** appena trovato.

A (in base 2) _____ **A (in base 8)** _____

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 5

Trattandosi di un numero negativo, il naturale A vale $2^p - |-31| = 64 - 31 = 33_{(10)}$, ossia $A=100001_{(2)}$.

Per esprimere A in base 8 basta raggruppare le cifre a tre a tre partendo da sinistra e decodificare ciascun gruppo mediante conversione da binario a decimale:

$A=41_{(8)}$ (e si legge quattro uno in base otto).

Esercizio 6

Dato il numero naturale A la cui codifica in base 5 è 104, trovarne la codifica in base 2.

Successivamente, assumendo che la rappresentazione binaria trovata sia quella dell'esponente E di un numero reale in *half precision* ($K=5$), dire quanto vale l'esponente intero e corrispondente.

A (in base 2) _____ **e** _____

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 6

Il numero $104_{(5)}$ corrisponde al decimale $1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^0 = 29_{(10)}$.

$29_{(10)}$ equivale a $16+8+4+1$, ossia $11101_{(2)}$.

Considerando 11101 come il valore di E , *l'intero e corrispondente è il naturale che si ottiene sottraendo ad E il bias $B = K^{5-1} - 1 = 15$, ossia $29 - 15 = 14$. Dunque l'esponente e è positivo e vale **14**.*

Esercizio 7

Rappresentare il numero intero decimale $a = -31$ in base 3 su 5 cifre, mediante tecnica del modulo e segno (si utilizzi la cifra 1 per codificare il segno).

A (ms base 3)

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 7

Per prima cosa occorre trovare la rappresentazione del modulo di a su 4 cifre.

Notando che $31 = 3^3 + 3^1 + 3^0$, segue che la rappresentazione su quattro cifre è 1011.

Premettendo il segno (rappresentato con la cifra ad 1, in analogia a quanto avviene in base 2), si ottiene la rappresentazione cercata: **11011**.

Esercizio 8

Sia data la seguente rappresentazione R_1 di un numero reale in virgola mobile su 8 bit (tre per l'esponente, quattro per la mantissa, uno per il segno): $R_1 = \{S, E, F\}$, con $S = 0$, $E = 010$ ed $F = 1010$.

- A quale numero reale r_1 corrisponde la rappresentazione R_1 ?
- Quanto vale in base dieci il massimo numero r_2 rappresentabile su 8 bit, ossia quello associato al “ $+\infty$ ” ?

r_1 _____

r_2 _____

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 8

La mantissa $m_1 = 1.1010$, per via dell'uno implicito.

L'esponente e_1 vale $E_1 - bias = 010 - 011 = -1$

$S=0$ (ossia il numero è positivo).

Pertanto $r_1 = 1.1010 \cdot due^{-1} = 0.11010 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} = 0.5 + 0.25 + .0625 = +0.8125$.

Il massimo reale positivo è quello associato al segno positivo ($S_2=0$), al massimo esponente $E_2=111$ ed alla massima mantissa $F_2=1111$.

La mantissa m_2 associata vale: 1.1111, mentre l'esponente e_2 associato vale: $111 - 011 = 7 - 3 = 4$.

Pertanto $r_2 = 1.1111 \cdot due^{+4} = 11111 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$.

Esercizio 9

- Sia dato il numero 105 in base 6. Trovarne la rappresentazione in base 10 e quella in base 2 .

Base 10 _____

Base 2 _____

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 9

105 in base 6 corrisponde a 41 in base 10. Infatti, utilizzando la formula della sommatoria, si ottiene:

$$1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^0 = 36 + 5 = (41)_{10}.$$

La rappresentazione di $(41)_{10}$ in base 2 si può ottenere con la procedura Div&Mod:

$$q_0 = 41$$

$$q_1 = 41 \text{ div } 2 = 20 \quad a_0 = 41 \text{ mod } 2 = 1$$

$$q_2 = 20 \text{ div } 2 = 10 \quad a_1 = 20 \text{ mod } 2 = 0$$

$$q_3 = 10 \text{ div } 2 = 5 \quad a_2 = 10 \text{ mod } 2 = 0$$

$$q_4 = 5 \text{ div } 2 = 2 \quad a_3 = 5 \text{ mod } 2 = 1$$

$$q_5 = 2 \text{ div } 2 = 1 \quad a_4 = 2 \text{ mod } 2 = 0$$

$$q_6 = 1 \text{ div } 2 = \mathbf{0} \quad a_5 = 1 \text{ mod } 2 = 1$$

Pertanto la rappresentazione in base due cercata consta di 6 bit $(a_5 \dots a_0)$: **101001**.

Esercizio 10

Dato il numero reale $r = 0.3125$, trovarne la rappresentazione binaria R in virgola fissa, usando 6 bit per la parte decimale.

$$R = 0.\square\square\square\square\square\square$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 10

Si pone $f_0 = 0.3125$ e poi si applica l'algoritmo "Parte frazionaria – Parte intera":

$$f_0 = 0.3125$$

$$f_1 = F(f_0 \cdot 2 = 0.3125 \cdot 2 = \mathbf{0.625}) = 0.625 \quad a_{.1} = I(0.625) = \mathbf{0}$$

$$f_2 = F(f_1 \cdot 2 = 0.625 \cdot 2 = \mathbf{1.25}) = 0.25 \quad a_{.2} = I(1.25) = \mathbf{1}$$

$$f_3 = F(f_2 \cdot 2 = 0.25 \cdot 2 = \mathbf{0.5}) = 0.5 \quad a_{.3} = I(0.5) = \mathbf{0}$$

$$f_4 = F(f_3 \cdot 2 = 0.5 \cdot 2 = \mathbf{1.0}) = \mathbf{0} \quad a_{.4} = I(1.0) = \mathbf{1}$$

Avendo ottenuto f_4 pari a zero, l'algoritmo si ferma. Questo significa che il numero reale 0.3125 ha rappresentazione binaria esatta, pari a $(a_{.1}a_{.2}a_{.3}a_{.4}) = 0101$.

Poichè era richiesta la rappresentazione su 6 bit per la parte frazionaria, si aggiungono due ulteriori zeri a destra: $R = \mathbf{0.010100}$.

Esercizio 11

Data la rappresentazione $\mathbf{A} = (11110001)_2$ di un intero in complemento a 2, trovarne il valore in base 10.

$$\mathbf{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 11

Dopo aver notato che A inizia per 1 e che pertanto a non può che essere negativo, il suo valore assoluto è dato dalla formula $2^8 - A$, dove A viene trattato come se fosse un naturale:

$$2^8 - 11110001 = 256 - (2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0) = 256 - (128 + 64 + 32 + 16 + 1) = 256 - 221 = (31)_{10}, \text{ ossia } \textit{trentuno}.$$

Ricapitolando $a = \mathbf{-31}$.

Esercizio 12

Data la rappresentazione in virgola mobile $\mathbf{R} = \{s,F,E\}$, dove $s=1$, $F=01000$ (mantissa su 5 bit) ed $E=010$ (esponente su 3 bit), a quale numero reale r corrisponde?

$$r = \underline{\hspace{2cm}}$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 12

La mantissa m di r è: 1.01000, per via dell'uno implicito. L'esponente è dato da E meno il bias. In questo caso E vale 010 ed il bias 011, dunque la differenza da -1. In definitiva $r=1.01000 \cdot \text{due}^{-1}$, ossia 0.101000 (basta infatti spostare il separatore decimale a sinistra di uno).

Pertanto $r = 2^{-1} + 2^{-3} = 0.5 + 0.125 = \mathbf{-0.625}$.

Esercizio 13

Dato il numero reale r , la cui rappresentazione in virgola mobile $\mathbf{R} = \{s, F, E\}$ sia: $s=1$, $F=01000$ (mantissa su 5 bit) ed $E=010$ (esponente su 3 bit), trovare la rappresentazione del numero reale $r'=2 \cdot r$.

$$\mathbf{R}' = \{s' = \square, F' = \square\square\square\square\square, E' = \square\square\square\}$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 13

r' avrà la stessa rappresentazione di r , ma con l'esponente incrementato di uno. Pertanto $E' = 011$.
Complessivamente la rappresentazione cercata è:

$$\mathbf{R'} = \{ \mathbf{s'=1, F'=01000, E'=011} \}$$

Controprova: decodificando \mathbf{R} si scopre che $r = 0.625$, mentre decodificando $\mathbf{R'}$ si scopre che r' è 1.25, laddove 1.25 è effettivamente il doppio di 0.625.

Esercizio 14

Sia data la seguente rappresentazione R_1 di un numero reale in virgola mobile su 8 bit (due per l'esponente, cinque per la mantissa, uno per il segno): $R_1 = \{S, E, F\}$, con $S = 0$, $E = 10$ ed $F = 00110$.

- A quale numero reale r_1 corrisponde la rappresentazione R_1 ?
- Quanto vale in base dieci il minimo numero r_2 rappresentabile su 8 bit, ossia quello associato al “ $-\infty$ ” ?

r_1 _____

r_2 _____

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 14

La mantissa $m_1 = 1.00110$, per via dell'uno implicito.

L'esponente e_1 vale $E_1 - bias = 10 - 01 = +1$

$S=1$ (ossia il numero è negativo).

Pertanto $r_1 = -1.00110 \cdot due^{+1} = -10.0110 = - (2^{+1} + 2^{-2} + 2^{-3}) = - (2 + 0.25 + .125) = -2.375$

Il massimo reale negativo è quello associato al segno positivo ($S_2=1$), al massimo esponente $E_2=11$ ed alla massima mantissa $F_2=11111$.

La mantissa m_2 associata vale: 1.11111 , mentre l'esponente e_2 associato vale: $11 - 01 = +2$.

Pertanto $r_2 = -1.11111 \cdot due^{+2} = -111.111 = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = -7.875$.

Esercizio 15

Sia dato il numero reale $r = -13.8125$. Calcolare la sua rappresentazione in virgola mobile su 16 bit. Seguire lo standard IEEE-754 half-precision, ovvero: 1 bit per il segno, 5 bit per l'esponente, 10 bit per la parte frazionaria della mantissa.

Soluzione Esercizio 15

Siccome r è negativo, il bit del segno sarà $s=1$. Calcolo adesso la rappresentazione del valore assoluto di r in base 2.

$|r| = 13.8125 = 13 + 0.8125$. La parte intera (13) e quella frazionaria (0.8125) possono essere convertite in base 2 separatamente, rispettivamente con l'algoritmo "DIV&MOD" e l'algoritmo "parte frazionaria - parte intera".

Conversione della parte intera in base 2:

$$13/2 = 6, \text{ resto} = 1$$

$$6/2 = 3, \text{ resto} = 0$$

$$3/2 = 1, \text{ resto} = 1$$

$$1/2 = 0, \text{ resto} = 1 \Rightarrow \text{FINE}$$

$$13 = (1101)_2$$

Conversione della parte frazionaria in base 2:

$$0.8125 * 2 = 1.625, \text{ parte intera} = 1$$

$$0.625 * 2 = 1.25, \text{ parte intera} = 1$$

$$0.25 * 2 = 0.5, \text{ parte intera} = 0$$

$$0.5 * 2 = 1, \text{ parte intera} = 1 \Rightarrow \text{FINE}$$

$$0.8125 = (0.1101)_2$$

$$\text{Quindi: } 13.8125 = (1101.1101)_2$$

Sposto la virgola di tre posizioni verso sinistra per ottenere il significando nella forma $(1.F)_2$.

$$1101.1101 = 1.1011101 \text{ due}^{+3}$$

La parte frazionaria sarà quindi $F = 1011101000$. Adesso devo rappresentare l'esponente, che vale 3, nella rappresentazione intera con bias E . Quindi devo imporre che $E - \text{bias} = 3$. Il bias vale $2^{k-1} - 1$ dove k sono i bit su cui è rappresentato l'esponente. Nel nostro caso $k=5$, quindi $\text{bias}=15$. Se $E - 15 = 3$ allora $E = 3 + 15 = 18$.

Conversione di E in base 2:

$$18/2 = 9, \text{ resto} 0$$

$$9/2 = 4, \text{ resto} 1$$

$$4/2 = 2, \text{ resto} 0$$

$$2/2 = 1, \text{ resto} 0$$

$$1/2 = 0, \text{ resto} 1 \Rightarrow \text{FINE}$$

$$18 = (10010)_2$$

La rappresentazione di r sarà quindi $R = \mathbf{1\ 10010\ 1011101000}$.