UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Comunicazioni numeriche
Esercizi su sistemi di variabili aleatorie-e sui processi stocastici

Sistemi di variabili aleatorie

Esercizio 1. La ddp congiunta di 2 v.a. x, y è data da

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} k(x+y) & 0<x<2, 0<y<2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Dove k è una costante.

1) Si calcoli il valore di k
2) Si ricavino le ddp marginali di x e y e si dica se le v.a. sono indipendenti
3) Si ricavino le ddp condizionate $p(x|y)$ e $p(y|x)$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di variabili definito dalla seguente trasformazione lineare

$$\begin{cases} V = X - Y \\ Z = Y \end{cases}$$

essendo X e Y variabili aleatorie Gaussiane standard, indipendenti.

1 Calcolare varianze e valori medi di V e Z.
2 Disegnare la densità di probabilità di V.
3 Stabilire se V e Z sono indipendenti
4 Calcolare la probabilità che V>α.

Esercizio 3. X e Y sono v.a. Gaussiane e indipendenti, a media nulla e varianza unitaria. Si stabilisca se le v.a. Z=X+Y e V=X-Y sono indipendenti.

Esercizio 4. Siano date due variabili aleatorie X_1 e X_2, indipendenti tra di loro. Sapendo che entrambe hanno una densità di probabilità Gaussiana a valor medio unitario e varianza $\sigma^2 = 9$, si calcoli la densità di probabilità delle variabili $Y_1 = X_1 + 2X_2$ e $Y_2 = X_1 - 2X_2$. Si dica se le due variabili aleatorie sono o no indipendenti.

Esercizio 5. Siano date le variabili aleatorie X e Y con ddp congiunta $f_{XY}(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{4\pi}\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$ per $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$. Si dimostri che X e Y sono dipendenti ma incorrelate.

Processi stocastici

Esercizio 1. Il segnale utile (deterministico) $s(t) = A$ viene ricevuto insieme a rumore additivo Gaussiano bianco (AWGN) $W(t)$, avente densità spettrale di potenza $S_W(f) = N_0/2$, ed inviato in ingresso ad un filtro LTI avente risposta impulsiva $h(t) = 2B\text{sinc}(2Bt)$. All'uscita del filtro otteniamo il segnale $Z(t) = [s(t) + W(t)] \otimes h(t) = r(t) + N(t)$, dove $r(t)$ è la componente di segnale utile ed $N(t)$ il processo di rumore filtrato. **(1)** Determinare il valor medio η_N, la potenza P_N e la densità spettrale di potenza $S_N(f)$ del rumore filtrato $N(t)$. Tracciare un grafico di $S_N(f)$. **(2)** Il segnale $Z(t)$ viene campionato all'istante *t=0*, ottenendo la v.a. $Z = Z(0) = r(0) + N(0)$. Determinare il rapporto segnale-rumore al campionatore, definito come $SNR = r^2(0) \big/ E\{N^2(0)\}$; tracciare il grafico dell'andamento di SNR in funzione di del parametro *B* (banda del filtro LTI). **(3)** Che densità di probabilità ha la v.a. Z? Calcolare la probabilità dell'evento $\{Z > \alpha\}$ ed esprimerla in funzione di *SNR* quando $\alpha = A/B$.

Esercizio 2. Un processo di rumore bianco in banda B è applicato come ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva pari a $h(t) = 3\exp(-2t)u(t)$. Si calcolino il valor medio del processo Y(t) all'uscita del sistema e la sua densità spettrale di potenza.

Esercizio 3. Sia Y(t)=X(t)+W(t), dove X(t)=A e A è una variabile aleatoria con media nulla e varianza σ_A^2, mentre W(t) è rumore bianco in banda B indipendente da A e con potenza σ^2.

1)Si dimostri che Y(t) è stazionario in senso lato;
2)Si calcoli la densità spettrale di potenza di Y(t).

Esercizio 4. Si consideri il processo aleatorio $X(t) = M(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ in cui M(t) è un processo stazionario in senso lato avente densità spettrale di potenza $S(f) = rect(f/B)$ e θ è una v.a. uniformemente distribuita in [0, 2π]. Si calcoli la funzione di autocorrelazione di X(t) e si dica se il processo è stazionario almeno in senso lato.

Esercizio 5. Il processo $X(t) = 2 + 5\sin(2\pi f_0 t + \theta)$, dove θ è una variabile uniformente distribuita in $[-\pi, \pi]$, alimenta un sistema LTI la cui risposta impulsiva è data da $h(t) = \exp(-2t)u(t)$. Si calcolino valor medio e densità spettrale di potenza del processo all'ingresso e all'uscita del sistema.

Esercizio 6. Siano X(t) e Y(t) 2 processi stocastici a media nulla e congiuntamente stazionari in senso lato. Si consideri il processo casuale Z(t) definito da Z(t)=X(t)+Y(t).

1) Si determini la densità spettrale e la funzione di aucorrelazione di Z(t)
2) Si supponga ora che X(t) e Y(t) siano ortogonali. Si calcolino nuovamente la correlazione e la densità spettrale di Z(t).
3) Si dimostri che se X(t) e Y(t) sono ortogonali, la media quadratica di Z(t) è uguale alla somma delle medie quadratiche di X(t) e Y(t).

Esercizio 7. Siano dati i due processi $X(t) = \cos(4\pi t + \theta)$ e $Y(t) = \cos(6\pi t + \theta)$ dove θ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0, 2\pi]$.

a. Determinare le funzioni valor medio e le funzioni di autocorrelazione dei due processi. Stabilire se i due processi sono stazionari in senso lato
b. Dato il processo somma $Z(t)=X(t)+Y(t)$, determinate la funzione valor medio e la potenza $E\{Z^2(t)\}$.

Esercizio 8. Un processo stocastico stazionario in senso lato con funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}$, dove a è una costante positiva reale, è applicato ad un sistema lineare tempo invariante (LTI) con risposta impulsiva $h(t)=e^{-b\tau}u(t)$, dove b è una costante positiva reale diversa da a. Si determini la funzione di correlazione del processo Y(t) all'uscita dell'LTI.

Esercizio 9. Sia Y(t)=A+W(t), dove A è un parametro deterministico, e W(t) è rumore bianco in banda B indipendente da A e con potenza σ^2.
3)Si calcoli la densità spettrale di potenza di Y(t).
Il processo Y(t) viene filtrato con un filtro passa banda come in Fig. 1
4)Si calcoli la densità spettrale di potenza del processo all'uscita del filtro e la sua funzione di autocorrelazione.

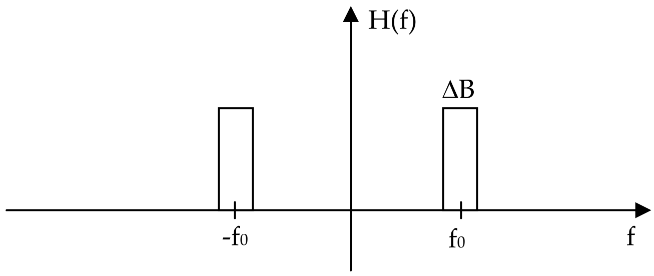


Fig. 1

Esercizio 10. Sia dato il processo Gaussiano $X(t)$ con densità spettrale di potenza $S_X(f)=\eta\cdot rect(f/4B)$. Il segnale $X(t)$ viene inviato in ingresso a un sistema lineare e tempo-invariante (LTI) avente risposta in frequenza $H(f)=rect(f/2B)$, ottenendo in uscita il processo $Y(t)$. Si consideri il processo $Z(t)=X(t)+Y(t)$. **(1)** Determinare la funzione di autocorrelazione $R_Z(\tau)$ del processo $Z(t)$. **(2)** Determinare la densità spettrale di potenza $S_Z(f)$ e la potenza media statistica P_Z del processo $Z(t)$. Si tracci il grafico di $S_Z(f)$.

Esercizio 11. Il processo aleatorio $X(t)=N(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t+\Theta)$ con $N(t)$ processo aleatorio a valor medio nullo e con densità spettrale di potenza $S_N(f)=\frac{N_0}{2}\cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right)$, e Θ variabile aleatoria (v.a.) uniformemente distribuita in $[-\pi,\pi]$ ed indipendente da $N(t)$, viene applicato ad un sistema lineare e stazionario caratterizzato da una risposta in frequenza $H(f)=rect(f/B)$, dando luogo in uscita al processo aleatorio $Y(t)$.

1. Si calcolino il valor medio, la potenza media e la funzione di autocorrelazione del processo $X(t)$.
2. Si discuta se il processo $X(t)$ è stazionario in senso lato o in senso stretto.
3. Si calcolino il valor medio e la potenza media del processo d'uscita $Y(t)$ al variare di f_0.

Esercizio 12. Sia dato un sistema LTI caratterizzato dall'equazione $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$.

All'ingresso del sistema viene posto il processo $X(t)$ bianco con correlazione $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$.

1) Calcolare la correlazione e la densità spettrale di potenza del processo $Y(t)$ all'uscita del sistema;
2) Calcolare la potenza dei processo $X(t)$ e $Y(t)$.

Esercizio 13: Si considerino i 2 processi casuali stazionari in senso lato $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ e $Y(t) = B\cos(2\pi f_1 t + \alpha)$, con A, B, f_0 e f_1 costanti. θ e α sono variabili aleatorie (v.a.) statisticamente indipendenti uniformemente distribuite in $[0, 2\pi]$.

1) Si calcoli la funzione di correlazione mutua $R_{XY}(t_1, t_2)$ e si dica se i processi sono congiuntamente stazionari.
2) Si rifaccia il calcolo per $\theta = \alpha$

Esercizio 14. Siano X(t) e Y(t) 2 processi stocastici a media nulla e congiuntamente stazionari in senso lato. Si consideri il processo casuale Z(t) definito da Z(t)=3X(t)+2Y(t).

4) Si determini la densità spettrale e la funzione di aucorrelazione di Z(t)
5) Si supponga ora che X(t) e Y(t) siano ortogonali. Si calcolino nuovamente la correlazione e la densità spettrale di Z(t).

Esercizio 15. Sia dato un sistema LTI caratterizzato dall'equazione $2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{x(t)}{3}$.

All'ingresso del sistema viene posto il processo $X(t)$ bianco con correlazione $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$.

1) Calcolare la correlazione e la densità spettrale di potenza del processo $Y(t)$ all'uscita del sistema;
2) Calcolare la potenza dei processi $X(t)$ e $Y(t)$.

Esercizio 16 – Si consideri il processo $Y(t) = X(t + t_0) - X(t - t_0)$, dove t_0 è una costante temporale deterministica e $X(t)$ un processo stazionario almeno in senso lato. Si calcolino funzione di correlazione e densità spettrale di potenza di Y(t) sapendo che la correlazione di X(t) è pari a $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \exp(-|\tau|)$.

Esercizio 17. Si consideri il processo $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, con A v.a. uniformemente distribuita in (0,1).

1. Si rappresentino 3 funzioni del processo
2. Si determini la densità di probabilità delle 2 v.a. $X_1 = X(0)$ e $X_2 = X(1/(2f_0))$.
3. Si determini la densità di probabilità condizionata $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$
4. Il processo $X(t)$ è stazionario?

Esercizio 18. Si considerino i seguente processi aleatori $X(t) = A\sin 2\pi ft + B\cos 2\pi ft$ e $Y(t) = A\sin 2\pi ft - B\cos 2\pi ft$ dove f è una costante, A e B sono 2 variabili aleatorie Gaussiane standard incorrelate tra loro.

1. Verificare se $X(t)$ e $Y(t)$ sono processi congiuntamente stazionari.
2. Si estraggano ora la variabili aleatorie X=X(0) e Y=Y(0). Si calcoli la probabilità che X>Y.

Esercizio 19: Sia dato il processo $X(t) = A rect\left(\frac{t}{2\theta}\right)$, con A e θ variabili aleatorie (v.a.) statisticamente indipendenti con le seguenti caratteristiche:

1) A v.a. Gaussiana a valor medio η e varianza σ^2

2) θ v.a. esponenziale negativa con ddp pari a $f(\theta) = \exp(-\theta)u(\theta)$.

Si calcoli in valor medio del processo.

Esercizio 20 – Si consideri il segnale $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + W(t)$, con A e f_0 parametri deterministici noti e $W(t)$ rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_W(f) = N_0/2$.

$X(t)$ viene filtrato con un sistema LTI la cui risposta in frequenza è pari $H(f) = (1 + j2\pi f)^{-1}$.

L'uscita del filtro suddetto è pari a $Y(t) = s_o(t) + N(t)$ dove $s_o(t)$ è la componente di uscita del segnale e $N(t)$ il rumore di uscita.

1) Calcolare l'espressione di $s_o(t)$;
2) Calcolare la potenza di W(t) e di $s_o(t)$;
3) Sia $Y = Y(t_0)$ la variabile estratta dal processo aleatorio $Y(t)$ campionando all'istante $t = t_0$. Scrivere la densità di probabilità di Y.

Esercizio 21: Sia dato un processo Gaussiano $X(t)$ con valor medio $E\{X(t)\} = 3$ e funzione di correlazione $R_X(t_0, t_1) = 9 + 2\exp\left[-0.5|t_1 - t_0|\right]$.

1) Si dica se il processo è stazionario in senso lato.

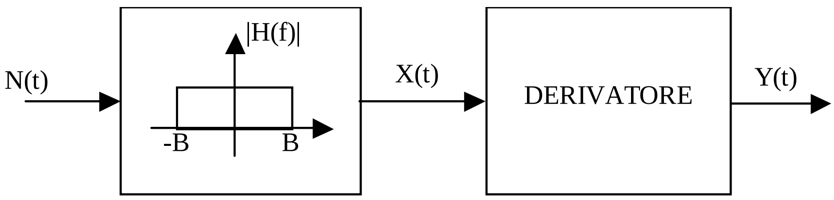
2) Si calcoli la funzione di covarianza del processo $C_X(t_0, t_1)$.

3) Si calcoli la varianza del processo $Var[X(t)]$.

4) Si scriva la densità di probabilità del primo ordine della generica variabile aleatoria $X(t_0)$.

5) Si scriva la densità di probabilità del secondo ordine delle due variabili $X(t_0)$ e $X(t_1)$ con $t_0 = 3$ e $t_1 = 7$.

Esercizio 22. Il sistema di figura è alimentato da una sorgente di rumore bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$. Si determini il valore di B che rende uguali le potenze di X(t) e Y(t).



Esercizio 23 – Si consideri il segnale $X(t) = A\sin\left(2\pi f_0 t\right) + W(t)$, con A e f_0 parametri deterministici noti e $W(t)$ rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_W(f) = N_0 / 2$.
$X(t)$ viene filtrato con un sistema LTI costituito da un derivatore seguito da un filtro passa basso ideale di banda B=2f_0. L'uscita del sistema suddetto è pari a $Y(t) = s_o(t) + N(t)$ dove $s_o(t)$ è la componente di uscita del segnale e $N(t)$ il rumore di uscita.

4) Calcolare l'espressione di $s_o(t)$;
5) Calcolare la densità spettrale di potenza e la potenza di $N(t)$;
6) Sia $Y = Y(0) = s_0\left(0\right) + N$ la variabile estratta dal processo aleatorio $Y(t)$ campionando all'istante $t = 0\sec$. Scrivere la densità di probabilità di Y e calcolare $P\left(Y > 0\right)$ in funzione del rapporto segnale-rumore all'uscita del sistema definito come $SNR = \dfrac{s_0^2\left(0\right)}{E\left\{N^2\right\}}$

Esercizio 24. Calcolare la media del processo aleatorio $X(t) = A\left|\cos(2\pi f_0 t + \Phi)\right|$ dove A e Φ sono due variabili aleatorie statisticamente indipendenti con densità di probabilità $f_A(a) = \dfrac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} u(a)$, e $f_\Phi(\phi) = \dfrac{1}{2\pi} rect\left(\dfrac{\phi}{2\pi}\right)$, rispettivamente.

Esercizio 25. Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti uniformemente distribuite nell'intervallo [0,1]. Si determini la media e la funzione di autocorrelazione del processo $Y(t) = 2X_1\cos\left(X_2 t\right)$. Si determini se il processo è stazionario, almeno in senso lato.

Esercizio 26. Dato il processo Gaussiano stazionario X(t) avente densità spettrale di potenza $S_X(f) = N_0 \cdot rect\left(\dfrac{f}{B}\right) + 9\cdot\delta(f)$, calcolare la densità spettrale di potenza e la funzione di autocorrelazione del processo $Y(t) = \dfrac{dX(t-1)}{dt}$.