COMPITINO INFO 20/04/2017

Es. 1 - v.

Es. 2 - Una v. casuale X ha un ddp del tipo:

$$f_X(x) = A x e^{-\frac{x^2}{2}} u(x).$$

1) Valutare A in modo che $f_X(x)$ sia effettivamente una ddp.

2) Sia data ora la v. $Y = X^2$. Calcolare la ddp della nuova variabile Y e valutarne il valor medio.

---

1) Applichiamo la proprietà di normalizzazione della ddp.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Nel nostro caso

$$A \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow A \Big[\underbrace{-e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^{+\infty}}_{1} \Big] = A \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

2) $Y = X^2$

Applichiamo il teorema fondamentale

$$f_Y(y) = \sum_i \left. \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \right|_{x_i = g^{-1}(y)}$$

Nel nostro caso le soluzioni analitiche sarebbero 2, $x = \pm\sqrt{y}$, ma quelle accettabili solo 1, $x = \sqrt{y}$ poiché x è una variabile sempre >0. Quindi

$$f_Y(y) = \left.\frac{\cancel{x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} u(x)}{2\cancel{x}}\right|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} u(y)$$

È una ddp esponenziale con parametro $\lambda = 2$.

$$E\{Y\} = \int_0^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 2$$

File B

Es. 1 - Siano dati 2 sistemi LTI in parallelo. Il primo è caratterizzato da una risposta impulsiva $h_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$, il secondo da $h_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \delta(t-3)$.

1) Si calcolino la risposta in frequenza $H_{eq}(f)$ e la risposta impulsiva $h_{eq}(t)$ equivalenti dell'intero sistema.

2) Si calcoli la risposta del sistema equivalente all'ingresso $x(t) = 3\cos(2\pi t + \theta_0)$

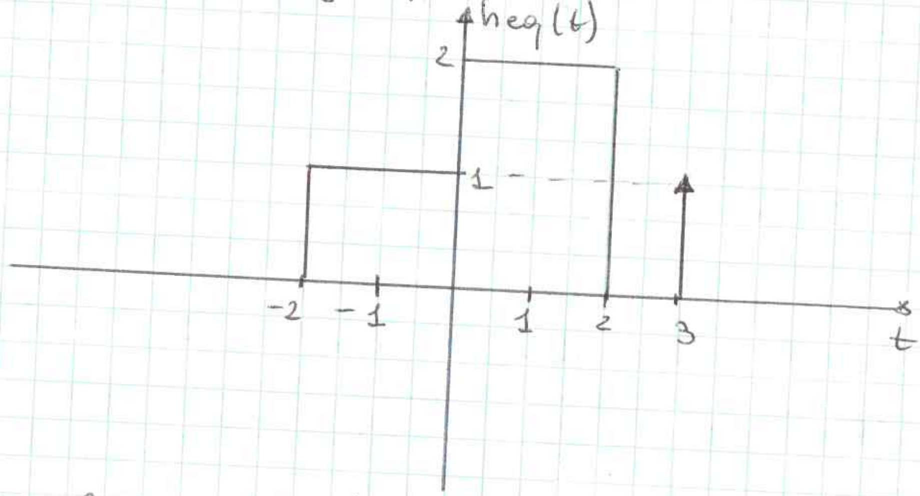
---

1) Poiché i due sistemi sono in parallelo
$h_{eq}(t) = h_1(t) + h_2(t)$ e $H_{eq}(f) = H_1(f) + H_2(f)$

$$h_{eq}(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \delta(t-3)$$

$$= 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \delta(t-3)$$

Facciamone il grafico



Per calcolare Heq(f) Trasformiamo heq(t)

$$H_{eq}(f) = \mathcal{F}[h_{eq}(t)] =$$

$$= 4\,\mathrm{sinc}(2f)\,e^{-j2\pi f} + 2\,\mathrm{sinc}(2f)\,e^{j2\pi f} + e^{-j6\pi f}$$

$$= 2\,\mathrm{sinc}(2f)\left[2e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f}\right] + e^{-j6\pi f}$$

2) $x(t) = 3\cos(2\pi t + \theta_0)$

La frequenza della cosinusoide è $f_0 = 1\,Hz$

Si sa che $y(t) = 3|H(f_0)|\cos(2\pi t + \theta_0 + \angle H(f_0))$,

dobbiamo perciò calcolare $H(f_0)$.

$$H(1) = e^{-j6\pi} = 1$$

Ne deriva che $y(t) = x(t)$.

Es. 2 – Una v. casuale X ha una ddp del tipo

$$f_X(x) = Ax\,e^{-\frac{x^2}{4}}\,u(x)$$

1) Valutare A in modo che $f_X(x)$ sia effettivamente una ddp.

2) Sia data ora la variabile $Y = 2X^2$. Calcolare lo

ddp della nuova variabile Y e valutarne il valor medio.

---

1) Per la soluzione vedere fila A.
In questo caso però risulta $A = \frac{1}{2}$, quindi

$$f_X(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{4}} u(x)$$

2) v. fila A. In questo caso però la soluz. accettabile è $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$ e $g'(x) = 4x$, da cui

$$f_Y(y) = \frac{1}{8} e^{-y/8} u(y).$$

E' una ddp esponenziale negativa con parametro $\lambda = 8$, per cui $E\{Y\} = 8$.

Fila C

Es 1 - Siano dati 2 sistemi LTI in serie.
Il primo è caratterizzato da una risposta impulsiva $h_1(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$, il secondo da $h_2(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right)$.
Si calcolino la risposta in frequenza $H_{eq}(f)$ e la risposta impulsiva $h_{eq}(t)$ equivalenti dell'intero sistema.

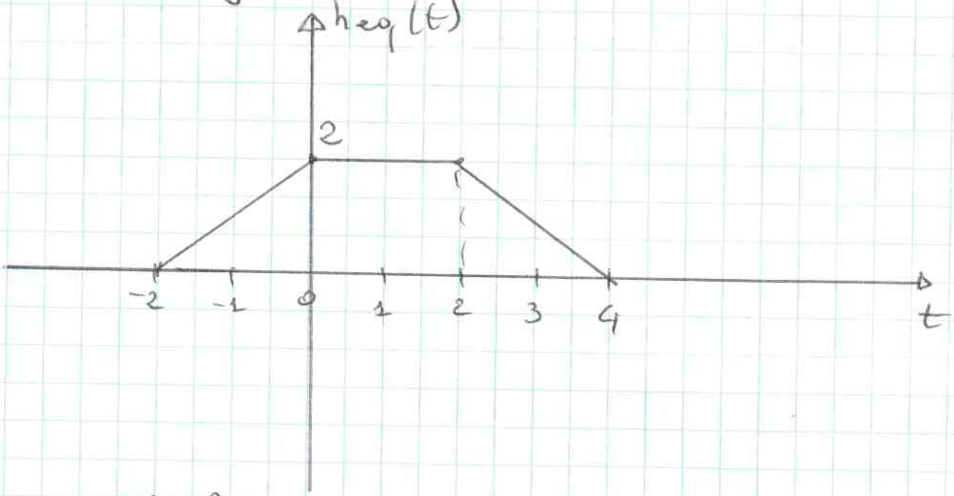
Poiché i 2 sistemi sono in serie $h_{eq}(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$
e $H_{eq}(f) = H_1(f) H_2(f)$

$$H_1(f) = \mathcal{F}[h_1(t)] = 2 \operatorname{sinc}(2f) e^{-j2\pi f}$$

$$H_2(f) = \mathcal{F}[h_2(t)] = 4 \operatorname{sinc}(4f)$$

$$H_{eq}(f) = 8\,\mathrm{sinc}(2f)\,\mathrm{sinc}(4f)\,e^{-j2\pi f}$$

$h_{eq}(t)$ è la convoluzione tra 2 rettangoli di larghezza 2 e 4, quindi risulta essere un trapezio come in figura.



$$h_{eq}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)\,h_2(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\tau-1}{2}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{4}\right) d\tau$$

$$= \int_{0}^{2} \mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{4}\right) d\tau$$ la I rect limita gli estremi di integrazione.

l'integrale della II rect varia al variare di t, per l'esattezza

$$h_{eq}(t) = \begin{cases} \int_0^{t+2} d\tau = t+2 & -2 \le t \le 0 \\ \int_0^{2} d\tau = 2 & 0 \le t \le 2 \\ \int_{t-2}^{2} d\tau = -t+4 & 2 \le t \le 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Es. 2 - Una variabile casuale X ha una densità di probabilità del tipo $f_X(x) = A e^{-\frac{x}{4}} u(x)$.

1) valutare A in modo che $f_X(x)$ sia effettivamente una ddp.

2) Sia data ora la variabile $Y = \sqrt{X}$. Calcolare la ddp della nuova variabile Y e valutarne il valor medio.

---

1) Dalla condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 \quad \text{si ricava che } A = \frac{1}{4}$$

La v.a x è una v.a. esponenziale negativa con parametro $\lambda = 4$

$$f_X(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} u(x)$$

2) $Y = \sqrt{X}$. Usiamo il teorema fondamentale

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|\dot{g}(x)|}\right|_{x = g^{-1}(y)}$$

dove $x = y^2$ e $\dot{g}(x) = 1/2\sqrt{x}$

$$f_Y(y) = \left.\frac{\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} u(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right|_{x=y^2} = \frac{y}{2} e^{-\frac{y^2}{4}} u(y)$$

$$E\{Y\} = \int_0^{+\infty} y \frac{y}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy = \text{ per parti}$$

$$\underbrace{-y\, e^{-\frac{y^2}{4}} \Big|_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy = \sqrt{\pi}$$

l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy$ si risolve osservando che, per la condizione di normalizzazione di una Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} (\;)\, dy = \sqrt{\pi}$$

Es. 1 COMPITO INFO

Sia $u(t)$ un processo Gaussiano stazionario a valor medio nullo e funzione di autocorrelazione $R_u(\tau) = \sigma_u^2 \operatorname{sinc}(2B\tau)$.

1) Si estragga la v.a. $u = u(0)$. Si scriva la ddp di u.

2) Sia dato ora il processo $y(t) = u(t) + 3u(t-T)$. Si calcolino la densità spettrale di potenza e la funzione di correlazione di $y(t)$.

---

1) La v.a. u ha una ddp Gaussiana a valor medio nullo e varianza σ_u^2

$$f_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right]$$

2) $y(t) = u(t) + 3u(t-T)$

$$R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1)\, y(t_2)\} =$$

$$= E\{[u(t_1) + 3u(t_1 - T)][u(t_2) + 3u(t_2 - T)]\}$$

$$= E\{u(t_1)u(t_2)\} + 3E\{u(t_1)\, u(t_2 - T)\}$$

$$+ 3E\{u(t_1 - T)\, u(t_2)\} + 9E\{u(t_1 - T)\, u(t_2 - T)\}$$

$$= R_u(t_2 - t_1) + 3R_u(t_2 - T - t_1) + 3R_u(t_2 - t_1 + T)$$

$$+ 9R_u(t_2 - t_1)$$

$$= 10\,R_u(\tau) + 3R_u(\tau - T) + 3R_u(\tau + T)$$

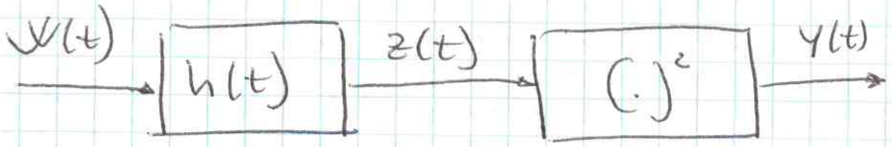
$$S_Y(f) = \mathcal{F}\left[R_Y(\tau)\right] =$$

$$= 10\,S_u(f) + 3\,S_u(f)\,e^{-j2\pi f T} + 3\,S_u(f)\,e^{j2\pi f T}$$

$$= \cancel{10}\; S_u(f)\left[10 + 6\cos(2\pi f T)\right]$$

COMPITO INFO 27/6/17

Es. 1. Un processo Gaussiano bianco in banda B, cioè con densità spettrale di potenza pari a $S_w(f) = \frac{N_0}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ viene filtrato da un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \delta(t) + 0.5\,\delta(t-T)$ e poi inviato in un quadratore. Quanto vale il valor medio del processo $Y(t)$ all'uscita del quadratore, sapendo che $B = 3/4T$.



$$Z(t) = W(t) \otimes h(t) = W(t) + \frac{1}{2}\,W(t-T)$$

$$Y(t) = Z^2(t) = \left[W(t) + \frac{1}{2}\,W(t-T)\right]^2$$

$$= W^2(t) + \frac{1}{4}\,W^2(t-T) + W(t)\,W(t-T)$$

$$E\{Y(t)\} = E\{w^2(t)\} + \frac{1}{4} E\{w^2(t-T)\} + E\{w(t)w(t-T)\}$$

$$= R_w(0) + \frac{1}{4} R_w(0) + R_w(T)$$

Calcoliamo $R_w(\tau)$

$$R_w(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_w(f)] = N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau)$$

$$\Rightarrow E\{Y(t)\} = \frac{3}{4} N_0 B + N_0 B \operatorname{sinc}\left(\frac{\cancel{2T}3}{2\cancel{4T}}\right)$$

$$= N_0 B\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3\pi}\right)$$

COMPITO INFO 18/07/17

Es. 1 - Sia dato il processo stazionario $X(t)$ con densità spettrale di potenza pari a $S_x(f) = \frac{\sigma_x^2}{2B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$.

Il processo $X(t)$ costituisce l'ingresso di un sistema LTI la cui risposta impulsiva è data da

$h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \delta(t-T) + \frac{1}{2}\delta(t-2T)$, con $B = \frac{1}{2T}$.

1) Calcolare l'espressione della densità spettrale di potenza e della correlazione del processo $Y(t)$ di uscita.

2) Fare il grafico di entrambe.

—

Calcoliamo la risposta in frequenza del sistema.

$$H(f)=\frac{1}{2}+e^{-j2\pi fT}+\frac{1}{2}e^{-j4\pi fT}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-j2\pi fT}\left[e^{j2\pi fT}+e^{-j2\pi fT}\right]+e^{-j2\pi fT}$$

$$=e^{-j2\pi fT}\left(\cos 2\pi fT+1\right)$$

$$=2e^{-j2\pi fT}\cos^2(\pi fT)$$

$$|H(f)|^2=4\cos^4\pi fT \Rightarrow S_Y(f)=\frac{2\sigma^2_x}{B}\cos^4(\pi fT)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Per calcolare la funzione di correlazione si può antitrasformare la $S_Y(f)$ oppure applicare direttamente la definizione $R_Y(\tau)=E\{Y(t)Y(t+\tau)\}$

$$Y(t)=x(t)\otimes h(t)=\frac{1}{2}x(t)+x(t-T)+\frac{1}{2}x(t-2T)$$

$$E\{Y(t)Y(t+\tau)\}=E\left\{\left[\frac{1}{2}x(t)+x(t-T)+\frac{1}{2}x(t-2T)\right]\left[\frac{1}{2}x(t+\tau)+x(t+\tau-T)+\frac{1}{2}x(t+\tau-2T)\right]\right\}$$

$$=E\Big\{\frac{1}{4}x(t)x(t+\tau)+\frac{1}{2}x(t)x(t+\tau-T)+\frac{1}{4}x(t)x(t+\tau-2T)$$
$$+\frac{1}{2}x(t)x(t+\tau)+x(t-T)x(t+\tau-T)+\frac{1}{2}x(t-T)x(t+\tau-2T)$$
$$+\frac{1}{4}x(t-2T)x(t+\tau)+\frac{1}{2}x(t-2T)x(t+\tau-T)$$
$$+\frac{1}{4}x(t-2T)x(t+\tau-2T)\Big\}$$

$$=\frac{3}{2}R_x(\tau)+R_x(\tau-T)+\frac{1}{4}R_x(\tau-2T)+R_x(\tau+T)$$
$$+\frac{1}{4}R_x(\tau+2T)$$

dove $R_x(\tau)=\mathcal{F}^{-1}\left[S_x(f)\right]=\sigma^2_x\,\mathrm{sinc}(2B\tau)$

2) Facciamo il grafico di $S_Y(f)$ e $R_Y(\tau)$ con $B = \frac{1}{2T}$.