La funzione di ambiguità

Maria S. Greco

Corso di Fondamenti di Radar

Ing. delle Telecomunicazioni

Dicembre 2014

Definizione e principali proprietà

Normalizziamo l'inviluppo del segnale complesso in modo che la sua energia sia unitaria:

$$x_u(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{E_x}}$$

$$A(\tau,\nu) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_u(t) x_u^*(t-\tau) \exp(j2\pi\nu t)\, dt \right|$$

Risulta evidente dalla definizione che la funzione di ambiguità rappresenta il modulo dell'uscita del filtro adattato quando l'ingresso è una versione shiftata in frequenza del segnale trasmesso, cioè

$$x_u(t)\exp(j2\pi\nu t)$$

La funzione di ambiguità è funzione di 2 variabili: il ritardo relativo τ e lo shift frequenziale ν.

Definizione e principali proprietà

La funzione di ambiguità gode di queste proprietà:

1) Valor massimo: $A(\tau,\nu) \leq A(0,0) = E = 1$

2) Volume costante: $V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\tau,\nu) d\tau d\nu = E^2 = 1$

3) Simmetria rispetto all'origine: $A(-\tau,-\nu) = A(\tau,\nu)$

4) Effetto dell'FM lineare: $u(t) \Leftrightarrow A(\tau,\nu) \quad u(t)\exp\left(j\pi k t^2\right) \Leftrightarrow A(\tau,\nu - k\tau)$

Dimostriamo la prima proprietà. Scriviamo

$$A(\tau,\nu)^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_u(t) x_u^*(t-\tau) \exp(j2\pi\nu t)\, dt \right|^2$$

Per la disuguaglianza di Schwartz si ha

$$A(\tau,\nu)^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x_u(t)|^2\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x_u^*(t-\tau) \exp(j2\pi\nu t) \right|^2 dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_u(t)|^2\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x_u^*(t-\tau) \right|^2 dt$$

Ciascun integrale è proprio uguale all'energia del segnale (unitaria per la normalizzazione) quindi

$$A(\tau,\nu) \le E = 1$$

L'uguaglianza si ha quando i due segnali nei due integrali sono uguali, cioè per τ=0 e ν=0.

La **seconda proprietà** è la più lunga da dimostrare (v. Richards, p. 172) ma è fondamentale. Questo principio di «conservazione dell'energia» stabilisce che non è possibile rimuovere energia da una specifica zona tempo-frequenza senza aggiungerla da qualche altra parte.

Dimostriamo **la terza proprietà**.

$$\begin{aligned}
A(-\tau,-\nu) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_u(t) x_u^*(t+\tau) \exp(-j2\pi\nu t)\, dt \right| \\
&= \left| \exp(j2\pi\nu\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} x_u(s-\tau) x_u^*(s) \exp(-j2\pi\nu s)\, ds \right| \\
&= \left| \exp(j2\pi\nu\tau) A^*(\tau,\nu) \right| \\
&= A(\tau,\nu)
\end{aligned}$$

Funzione di ambiguità di un impulso rettangolare

$$x_u(t) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} rect\left(\frac{t}{T_p}\right)$$

Applichiamo la definizione di funzione di ambiguità per τ>0

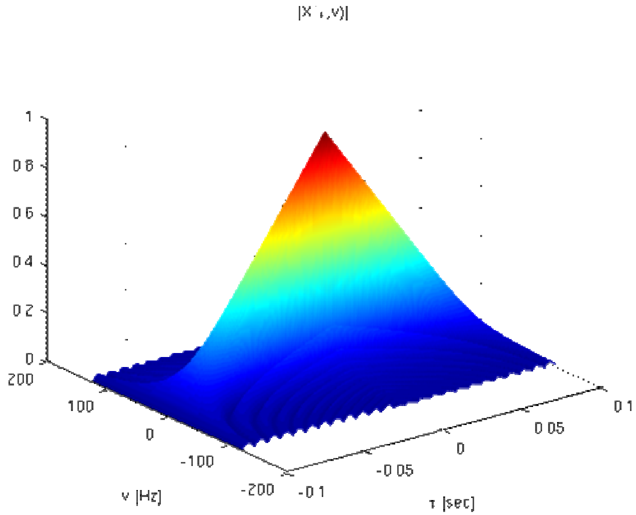
$$A(\tau,\nu) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_u(t) x_u^*(t-\tau) \exp(j2\pi\nu t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_{-T_p/2+\tau}^{+T_p/2} \frac{1}{T_p} \exp(j2\pi\nu t)\, dt \right| = \left| \frac{\sin\left(\pi\nu\left(T_p - \tau\right)\right)}{T_p \pi\nu} \right|$$

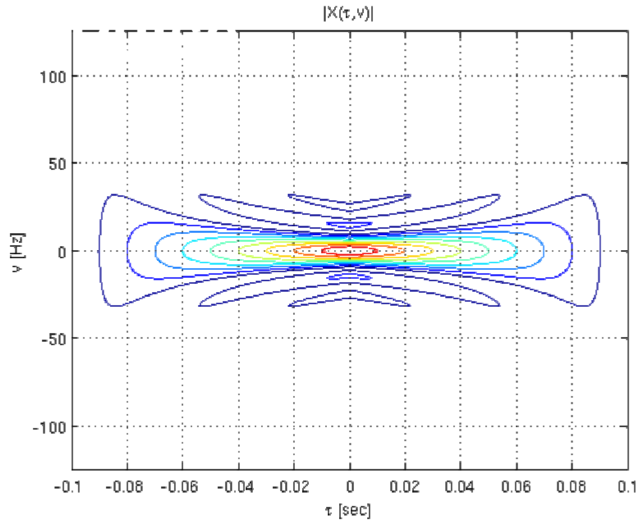
Per τ>0 si ottiene la stessa espressione, ma funzione di $\left(T_p + \tau\right)$. Quindi, in conclusione, per un impulso rettangolare la funzione di ambiguità è data da

$$A(\tau,\nu) = \left| \frac{\sin\left(\pi\nu\left(T_p - |\tau|\right)\right)}{T_p \pi\nu} \right| \qquad |\tau| \le T_p$$

$T_p = 0.1\text{s}$

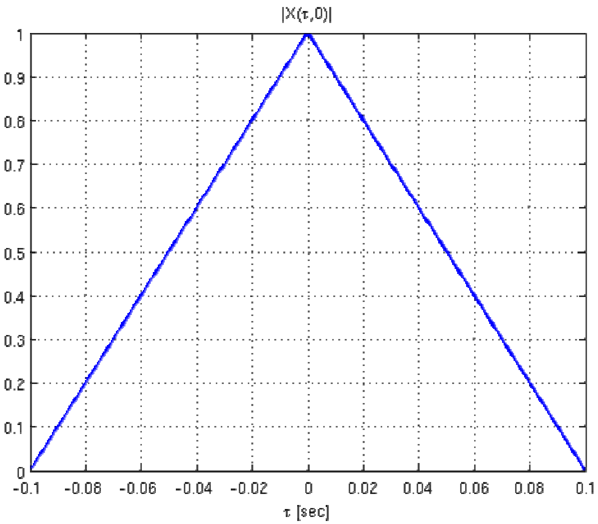


Absolute value of the CAF, 3D-graph.

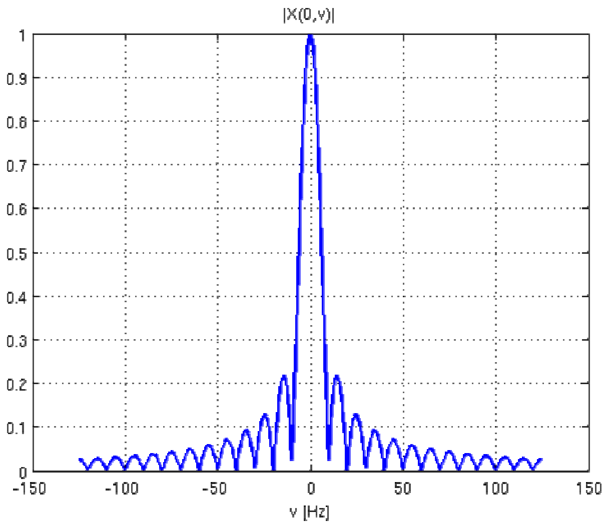


Absolute value of the CAF, contour-plot.

$$A(\tau,0) = \left| \frac{T_p - |\tau|}{T_p} \right|$$



Absolute value of the CAF, 0-Doppler Cut.



Absolute value of the CAF, 0-Delay Cut.

$$A(0,\nu) = \left| \frac{\sin(\pi \nu T_p)}{T_p \pi \nu} \right|$$

AF di un chirp

- **LFM pulse (chirp)**:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} \exp\left(j\pi k t^2 \right) \cdot rect\left(\frac{t}{T_p} \right), \quad \text{where} \quad k = \frac{B}{T_p}$$

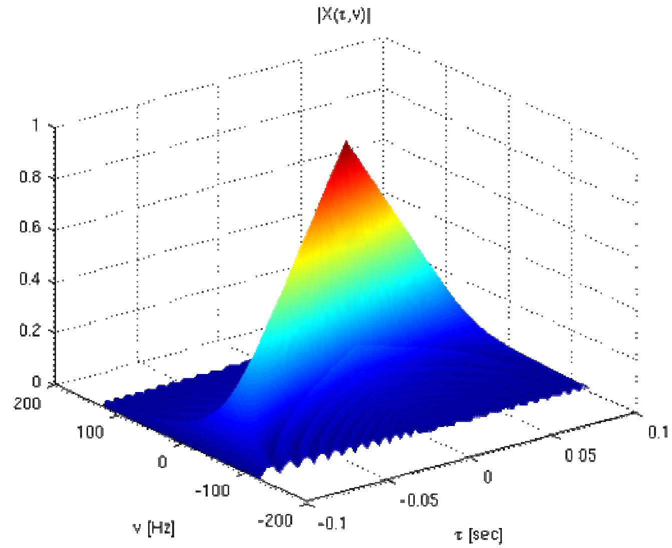
La frequenza istantanea è data da $f(t)=kt$, quindi $-B/2<f(t)<B/2$

$$A(\tau,\nu) = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{T_p} \right) \frac{\sin\left[\pi T_p (\nu - k\tau)\left(1 - |\tau|/T_p\right) \right]}{\pi T_p (\nu - k\tau)\left(1 - |\tau|/T_p\right)} \right|, \quad |\tau| < T_p$$

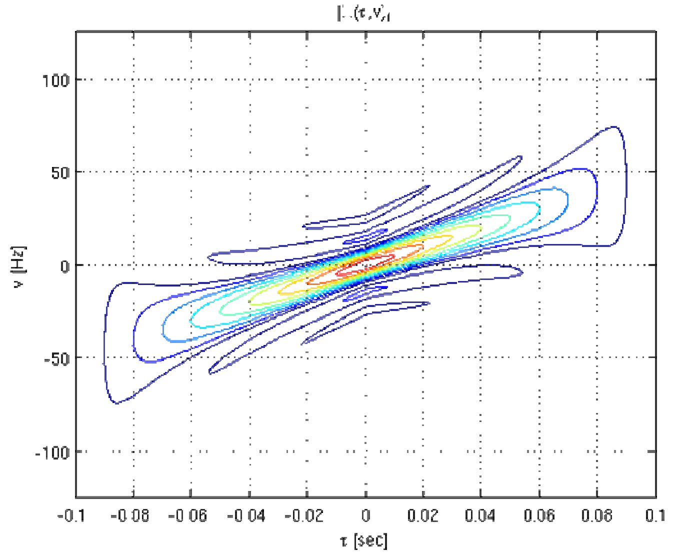
$T_p = 0.1\text{s},$

$B = 5/T_p$

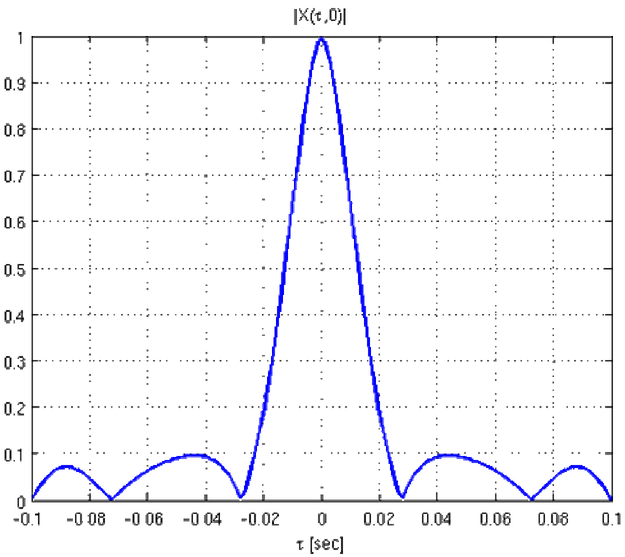
$= 50\,\text{Hz}$



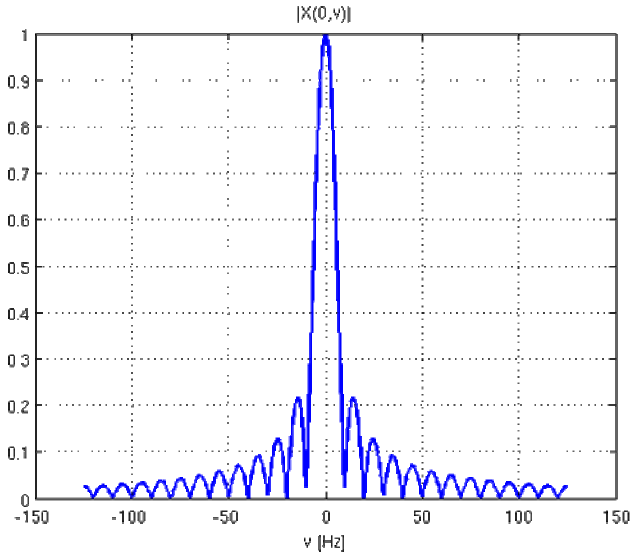
Absolute value of the CAF, 3D-graph.



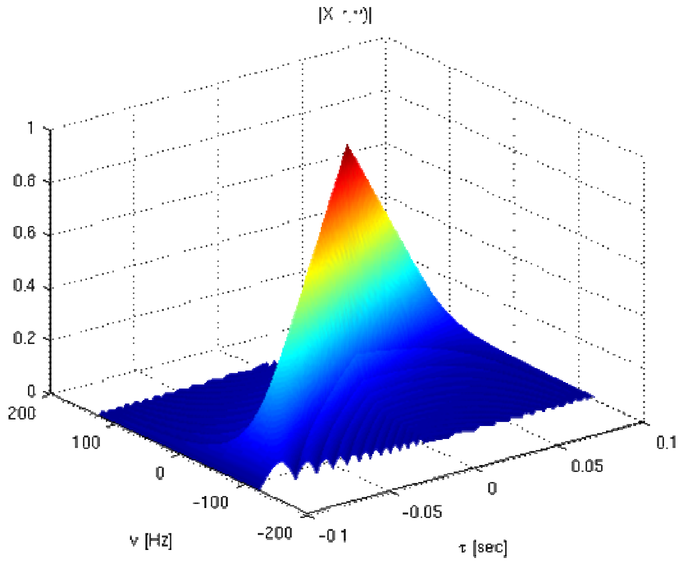
Absolute value of the CAF, contour-plot.



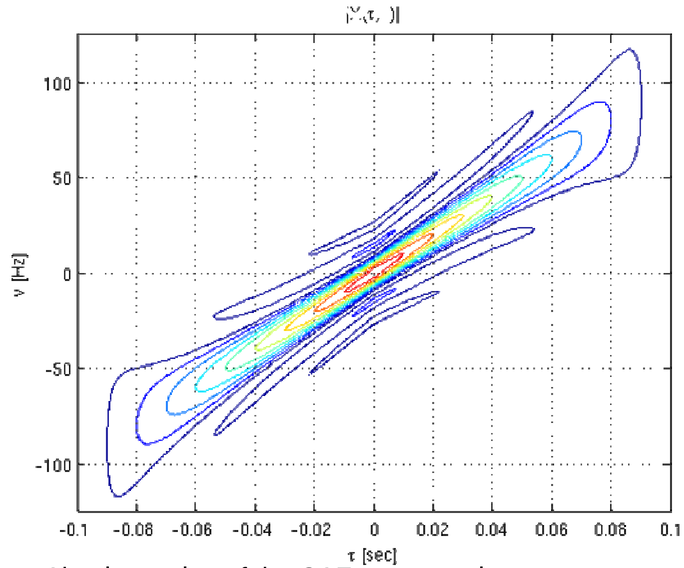
Absolute value of the CAF, 0-Doppler Cut.



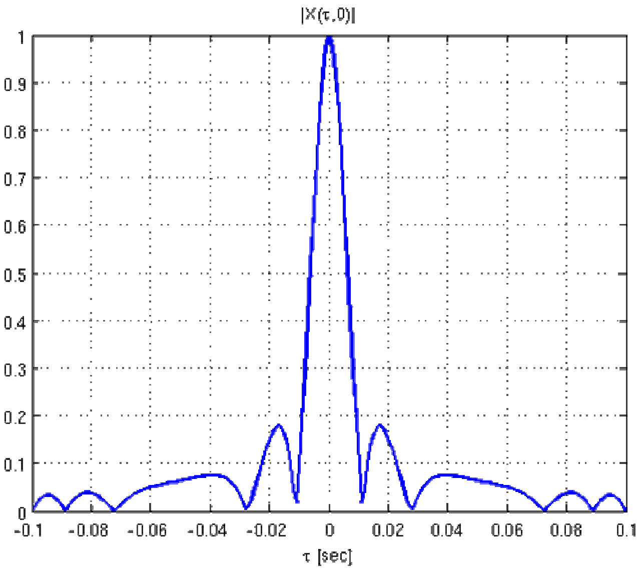
$$T_p = 0.1\,\mathrm{s},$$
$$B = 10/T_p$$
$$= 100\,\mathrm{Hz}$$



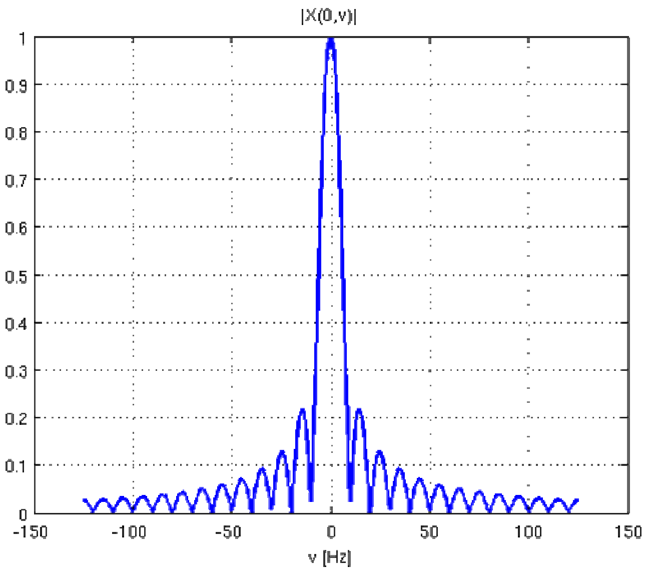
Absolute value of the CAF, 3D-graph.



Absolute value of the CAF, contour-plot.



Absolute value of the CAF, 0-Doppler Cut.



Absolute value of the CAF, 0-Delay Cut.

Funzione di ambiguità di un treno di impulsi

Indichiamo con x(t) il treno di impulsi

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M-1} x_p\left(t - mT_r\right)$$

Ricaviamone la funzione di ambiguità.

$$A(\tau,\nu) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} x_p\left(t - mT_r\right) \sum_{m=0}^{M-1} x_p^*\left(t - \tau - nT_r\right) \exp\left(j2\pi\nu t\right) dt \right|$$

$$= \left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x_p\left(t - mT_r\right) x_p^*\left(t - \tau - nT_r\right) \exp\left(j2\pi\nu t\right) dt \right|$$

Facciamo la sostituzione $s = t - mT_r$

$$A(\tau,\nu) = \left| \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(j2\pi\nu mT_r\right) \sum_{n=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x_p\left(s\right) x_p^*\left(s - \tau - nT_r + mT_r\right) \exp\left(j2\pi\nu s\right) ds \right|$$

Chiamiamo ora con $\hat{A}_p(\tau,\nu)$ la funzione di ambiguità complessa del singolo impulso (cioè senza valore assoluto) e otteniamo

$$A(\tau,\nu)=\left|\sum_{m=0}^{M-1}\exp\left(j2\pi\nu mT_r\right)\sum_{n=0}^{M-1}\hat{A}_p\left(\tau-(m-n)T_r,\nu\right)\right|$$

Lavorare con la doppia sommatoria non è per niente facile. E' possibile però dimostrare (Richards, p. 184) che vale la relazione

$$A(\tau,\nu)=\left|\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\hat{A}_p\left(\tau-mT_r,\nu\right)\exp\left(j2\pi\nu\left(M-1+m\right)T_r\right)\frac{\sin\left(\pi\nu\left(M-|m|T_r\right)\right)}{\sin\left(\pi\nu T_r\right)}\right|$$

Osservando che la durata della funzione di ambiguità del singolo impulso è , se, come succede sempre, Tr>2Tp, allora le varie repliche della $\hat{A}_p(\tau,\nu)$ non si sovrappongono e

$$A(\tau,\nu)=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}A_p\left(\tau-mT_r,\nu\right)\left|\frac{\sin\left(\pi\nu\left(M-|m|T_r\right)\right)}{\sin\left(\pi\nu T_r\right)}\right|$$

AF di M impulsi coerenti non modulati (bed of nails)

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{MT_p}} \sum_{m=0}^{M-1} rect\left(\frac{t - mT_r}{T_p}\right), \quad T_p = pulse\ duration$$

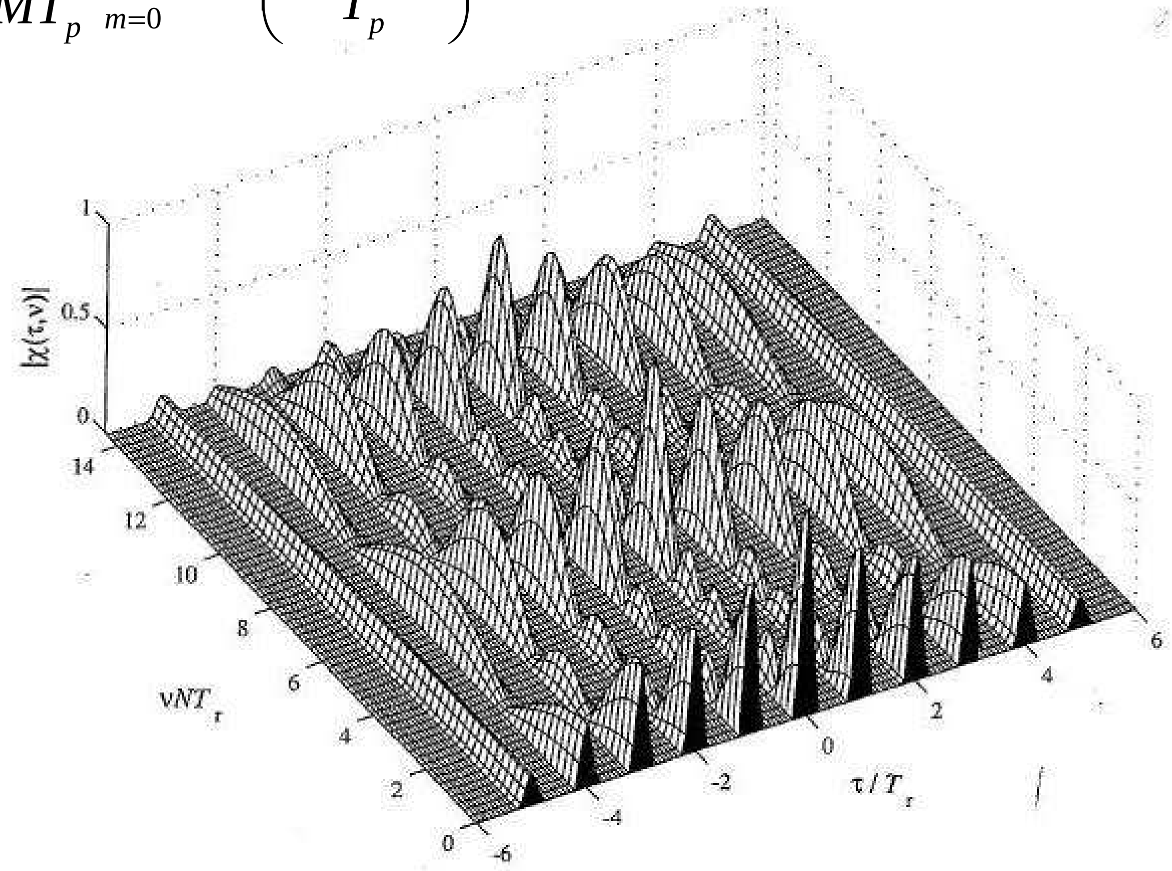


FIGURE 4.17 Partial ambiguity function of a coherent train of $N = 6$ pulses.

AF di M impulsi coerenti non modulati (bed of nails)

$$A(\tau,\nu)=\frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}A_S(\tau-mT_r,\nu)\left|\frac{\sin\left[\pi\nu\left(M-|m|\right)T_r\right]}{\sin\left[\pi\nu T_r\right]}\right|,\quad |\tau|<MT_r$$

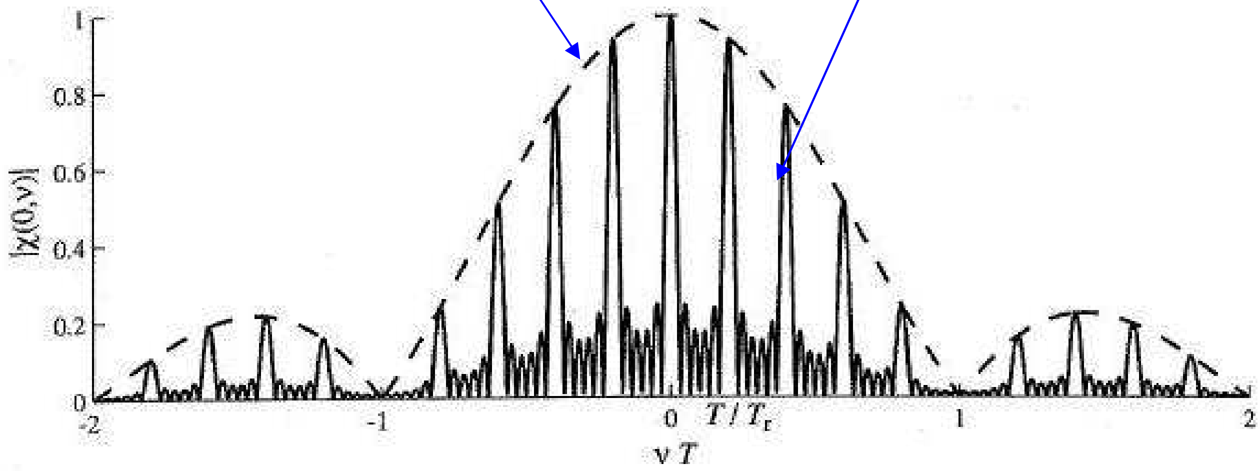
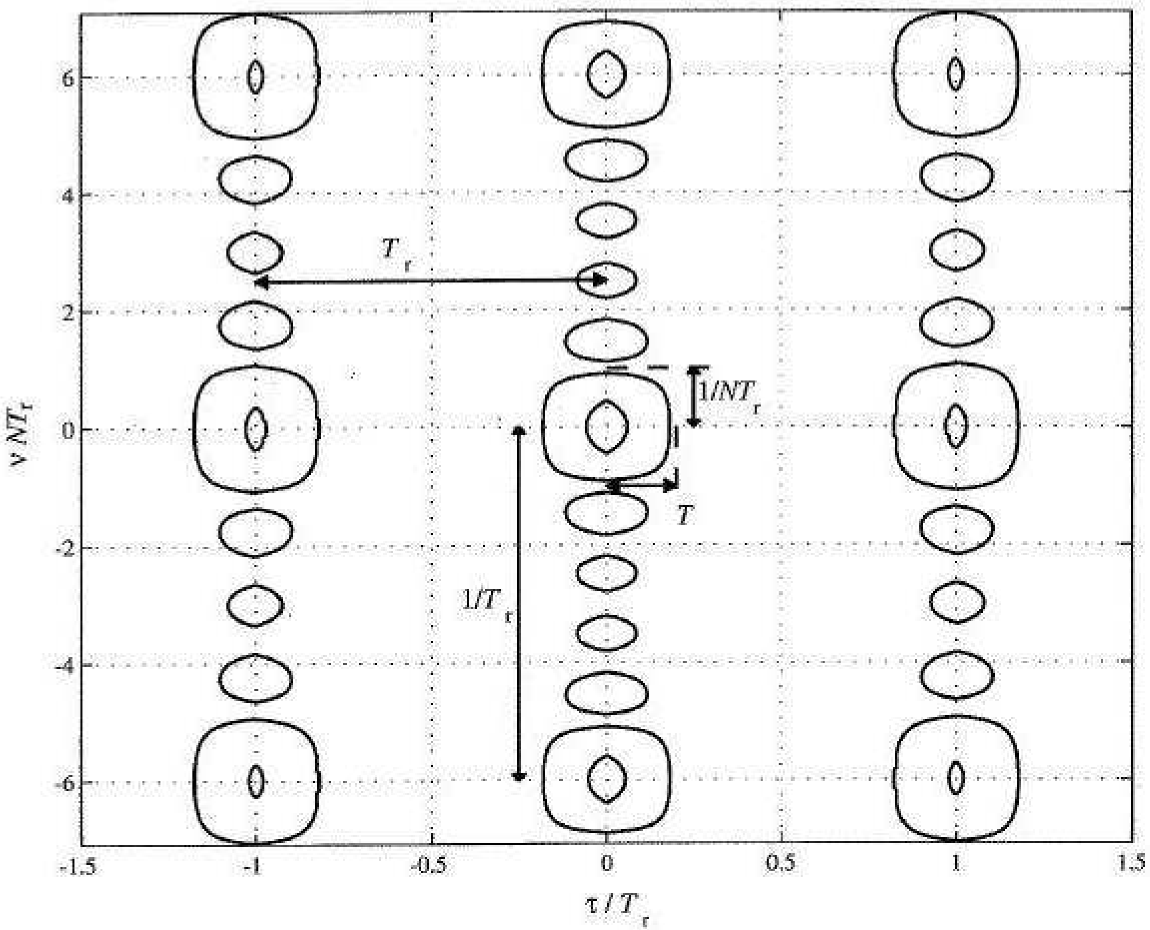


FIGURE 4.19 Zero-delay cut of the ambiguity function of six pulses.

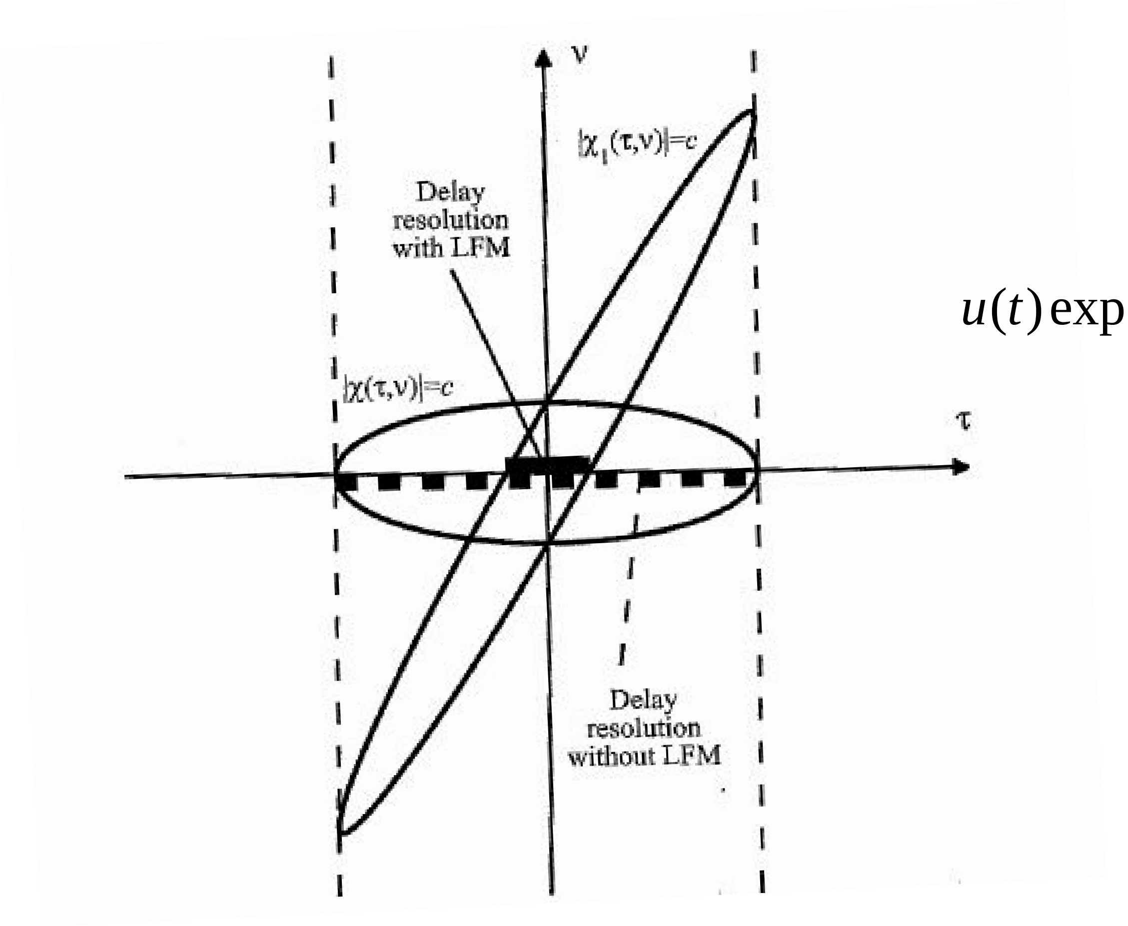
N.Levanon, E. Mozeson, Radar Signals, J. Wiley&Sons, 2004

AF di M impulsi coerenti non modulati (bed of nails)



La risoluzione in distanza è controllata dalla durata dell'impulso T, la risoluzione in frequenza dal tempo di integrazione MT_r

AF di un Chirp e risoluzione in range



$$u(t)\exp\left(j\pi k t^2\right) \Leftrightarrow A\left(\tau, \nu - k\tau\right)$$

Improved delay/range resolution by linear_FM shearing