Prova scritta di Teoria dei Segnali- **1/02/2018 – Fila A**

Esercizio 1. E' dato il segnale *x*(t) ad energia finita il cui spettro è pari a $X(f)=tr\left(\frac{f}{2B}\right)$. Il segnale *x*(t) costituisce l'ingresso di un sistema LTI la cui risposta impulsiva è data da $h(t)=-\frac{1}{2}\delta(t-T)+\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)+-\frac{1}{2}\delta(t)$.

1) Calcolare energia e potenza di x(t);

2) Calcolare *H*(f) e farne il grafico di modulo e fase;

3) Calcolare l'espressione *y*(t) del segnale di uscita del sistema LTI e farne il grafico per $B=\frac{2}{T}$;

4) Che tipo di distorsioni lineari subisce il segnale *x*(t) a causa di *h*(t) e perché?

Esercizio 2 Sia dato il seguente filtro analogico causale: $H_a(s)=\frac{5}{(s+2k)}$ con k costante reale positiva.

1) Si calcolino la risposta in frequenza del suddetto filtro e la banda a -3dB in funzione di k.

A partire dal filtro analogico si vuole progettare un filtro numerico con simili caratteristiche. A tal fine si utilizza la trasformazione bilineare con T=1msec.

2) Si scriva la funzione di trasferimento del nuovo filtro e se ne individui la zona di convergenza.

3) Si scriva l'espressione della risposta impulsiva *h*(*n*) e si faccia il grafico della forma canonica.

4) Si calcoli il valore di k nel filtro analogico sapendo che la banda a -3dB del filtro numerico precedentemente ottenuto deve essere pari a B=1/3 KHz ($\simeq 333\ Hz$).

Esercizio 3. Si dimostri che la trasformata del segnale $z(t)=x(t)\otimes y(t)$ è pari a $Z(f)=X(f)Y(f)$ (teorema della convoluzione). Tramite questo teorema di dimostri poi che se $z(t)=tr\left(\frac{t}{2T}\right)$, $Z(f)=T\mathrm{sinc}^2(fT)$.

Soluzione es. 1 –

1) Se $X(f)=tr\left(\frac{f}{2B}\right)$, $x(t)=B\mathrm{sinc}^2(Bt)$. Per calcolare la potenza conviene applicare il teorema di Parseval

$$E_X=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df=\int_{-B}^{+B}\left(1-\frac{|f|}{B}\right)^2 df=2\int_{0}^{+B}\left(1-\frac{f}{B}\right)^2 df=\frac{2}{3}B$$

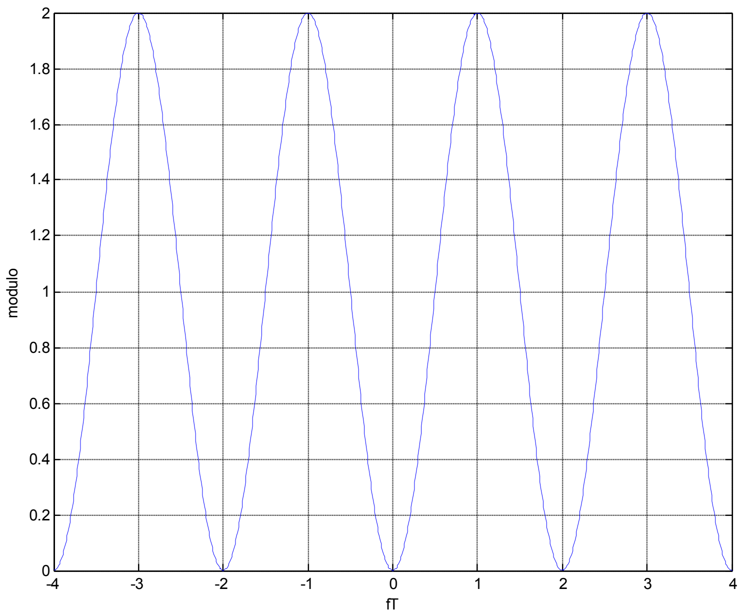
Avendo il segnale energia finita, la potenza è nulla.

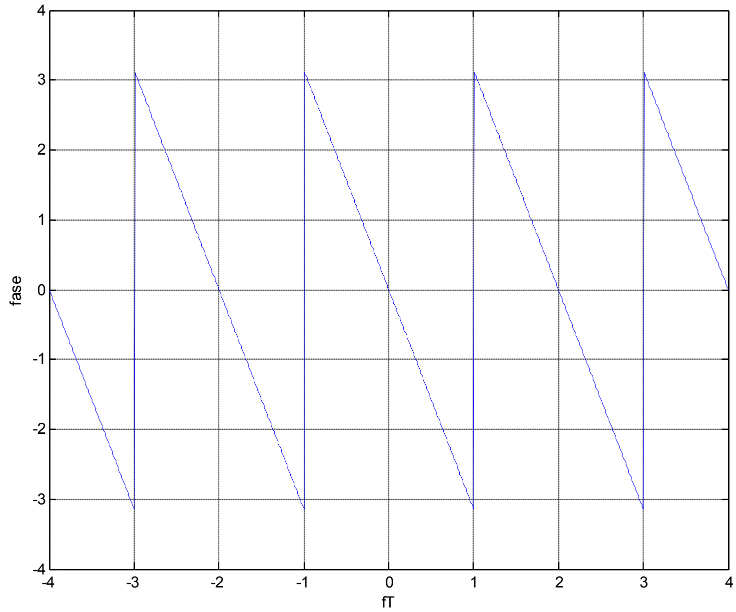
2) Calcolare *H*(f) e farne il grafico di modulo e fase.

–

$$H(f)=-\frac{1}{2}\left(1+e^{-j2\pi fT}\right)+e^{-j\pi fT}=e^{-j\pi fT}\left(1-\cos(\pi fT)\right)=2e^{-j\pi fT}\sin^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$$

Calcoliamo il modulo $|H(f)|=2\sin^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$ e $\angle H(f)=-\pi fT$. Seguono i grafici. Ricordiamo che la fase va disegnata tra −π e π.



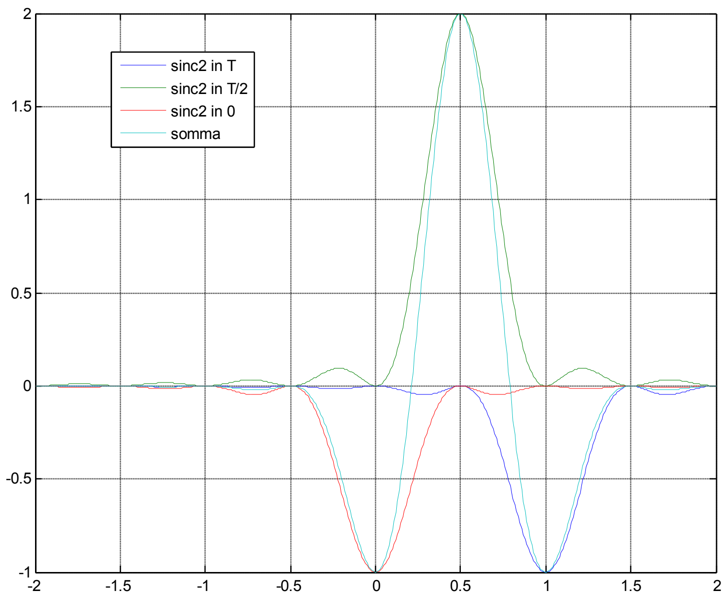


3) Calcolare l'espressione y(t) del segnale di uscita del sistema LTI e farne il grafico per $B=\frac{2}{T}$;

$$y(t)=h(t)\otimes x(t)=-\frac{1}{2}B\mathrm{sinc}^2\left(B\left(t-T\right)\right)+B\mathrm{sinc}^2\left(B\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)-\frac{1}{2}B\mathrm{sinc}^2\left(Bt\right)$$

Per $B=\frac{2}{T}$, $y(t)=-\frac{1}{T}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2}{T}(t-T)\right)+\frac{2}{T}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)-\frac{1}{T}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2}{T}t\right)$.

La figura sotto rappresenta y(t) per T=1 sec.



4) Il sistema introduce distorsioni di ampiezza, poiché nella banda del segnale H(f) non ha un modulo costante. Non introduce distorsioni di fase perché la fase è lineare.

Soluzione es. 2

1) Il filtro è un passa-basso. Calcoliamo la risposta in frequenza e il suo modulo

$$H_a(f) = H_a(s)\big|_{s=j2\pi f} = \frac{5}{\left(j2\pi f + 2k\right)} \quad \text{e} \quad \left|H_a(f)\right| = \frac{5}{\sqrt{4\pi^2 f^2 + 4k^2}}$$

Per calcolare la banda a -3dB osserviamo che $\left|H_a(0)\right| = \dfrac{5}{2k}$. Per cui

–

$$\frac{\left|H_a(B_{-3})\right|^2}{\left|H_a(0)\right|^2} = \frac{25}{4\pi^2 B_{-3}{}^2 + 4k^2}\frac{4k^2}{25} = \frac{1}{2}.$$

Da ciò si ricava che $B_{-3} = \dfrac{k}{\pi}$.

2) La trasformazione bilineare è data da . $s = \dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$. Sostituiamo in $H_a(s)$

$$H(z) = \frac{5}{\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 2k} = \frac{5\left(1+z^{-1}\right)}{\dfrac{2}{T}\left(1-z^{-1}\right) + 2k\left(1+z^{-1}\right)} = a\frac{z+1}{z+b}$$

con $a = \dfrac{5T}{2+2Tk}$ e $b = \dfrac{1-Tk}{1+Tk}$.

Il filtro converge per $|z| > \dfrac{|1-Tk|}{1+Tk} < 1$

3) Dalla funzione di trasferimento si ricava $Y(z)\left(1+bz^{-1}\right) = a\left(1+z^{-1}\right)X(z)$ da cui poi

$$y(n) = -by(n-1) + ax\left(n\right) + ax\left(n-1\right)$$

Antitrasformando $H(z) = a\dfrac{z+1}{z+b}$ otteniamo

$$h(n) = a\left[b^{n}u\left(n\right) + b^{n-1}u\left(n-1\right)\right]$$

4) Abbiamo visto che la banda a -3dB del filtro analogico è data da $B_{-3} = \dfrac{k}{\pi}$. Si vuole che il filtro digitale abbia una banda B=1/3 KHz. A causa del warping sappiamo che la relazione tra la frequenza analogica f_a e quella digitale f è data da $f_a = \dfrac{1}{\pi T} tg\left(\pi f T\right)$. Tale relazione vale anche tra la banda a -3dB analogica e quella digitale, per cui

$$B_{-3}=\frac{k}{\pi}=\frac{1}{\pi T}tg\left(\pi BT\right)=\frac{1}{\pi T}tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\pi T}$$

Segue che $k=\frac{\sqrt{3}}{T}\simeq 1732\,Hz$

–