Prova scritta di Teoria dei Segnali- **1/02/2018 – Fila B**

Esercizio 1. E' dato il segnale *x*(t) ad energia finita il cui spettro è pari a $X(f)=tr\left(\frac{f}{2B}\right)$. Il segnale *x*(t) costituisce l'ingresso di un sistema LTI la cui risposta impulsiva è data da $h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)$.

1) Calcolare energia e potenza di x(t);
2) Calcolare *H*(f) e farne il grafico di modulo e fase;
3) Calcolare l'espressione *y*(t) del segnale di uscita del sistema LTI e farne il grafico per $B=\frac{2}{T}$;
4) Che tipo di distorsioni lineari subisce il segnale *x*(t) a causa di *h*(t) e perché?

Esercizio 2 Sia dato il seguente filtro analogico causale: $H_a(s)=\frac{2}{(s+3k)}$ con k costante reale positiva.

1) Si calcolino la risposta in frequenza del suddetto filtro e la banda a -3dB in funzione di k.

A partire dal filtro analogico si vuole progettare un filtro numerico con simili caratteristiche. A tal fine si utilizza la trasformazione bilineare con T=1msec.

2) Si scriva la funzione di trasferimento del nuovo filtro e se ne individui la zona di convergenza.
3) Si scriva l'espressione della risposta impulsiva *h*(*n*) e si faccia il grafico della forma canonica.
4) Si calcoli il valore di k nel filtro analogico sapendo che la banda a -3dB del filtro numerico precedentemente ottenuto deve essere pari a B=250 Hz.

Esercizio 3. Si dimostri che la trasformata del segnale $z(t)=x(t)y(t)$ è pari a $Z(f)=X(f)\otimes Y(f)$ (teorema del prodotto). Tramite questo teorema si dimostri poi che se $z(t)=\frac{1}{T}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$ $Z(f)=tr\left(\frac{fT}{2}\right)$

Soluzione es. 1 –

1) Se $X(f) = tr\left(\frac{f}{2B}\right)$, $x(t) = B\text{sinc}^2\left(Bt\right)$. Per calcolare la potenza conviene applicare il teorema di Parseval

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df = \int_{-B}^{+B} \left(1 - \frac{|f|}{B}\right)^2 df = 2\int_{0}^{+B} \left(1 - \frac{f}{B}\right)^2 df = \frac{2}{3}B$$

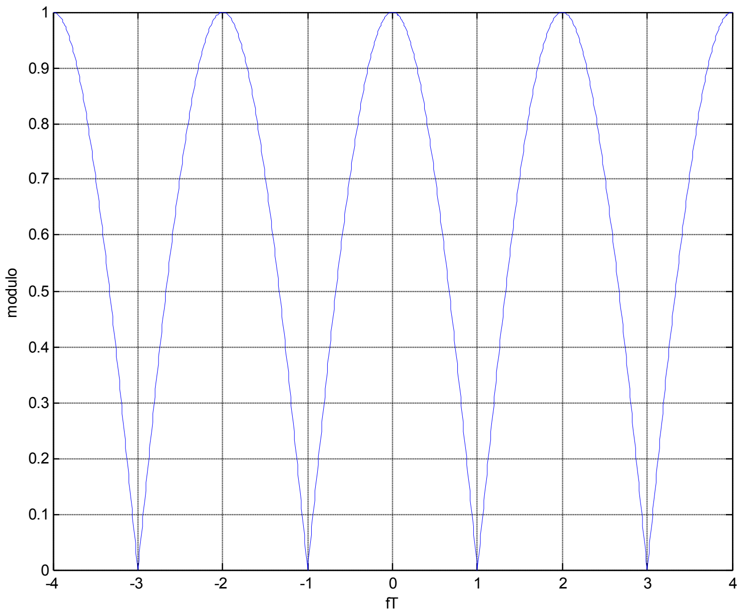
Essendo l'energoa del segnale finita, la potenza è nulla.

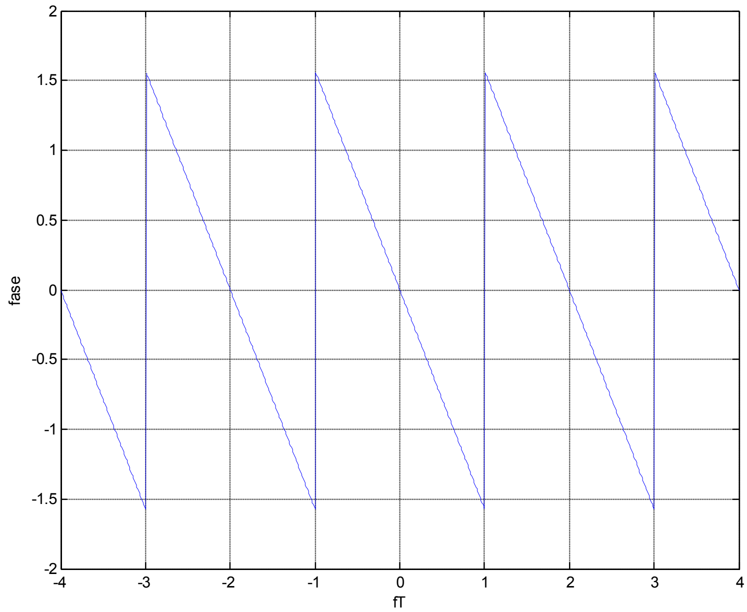
2) Calcolare *H*(f) e farne il grafico di modulo e fase.

–

$$H(f) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\pi fT}\right) = e^{-j\frac{\pi fT}{2}} \cos\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$$

Calcoliamo il modulo $|H(f)| = |\cos(\pi fT/2)|$ e $\angle H(f) = -\pi fT/2 + \angle\cos\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$. Seguono i grafici. Ricordiamo che la fase va disegnata tra –π e π.



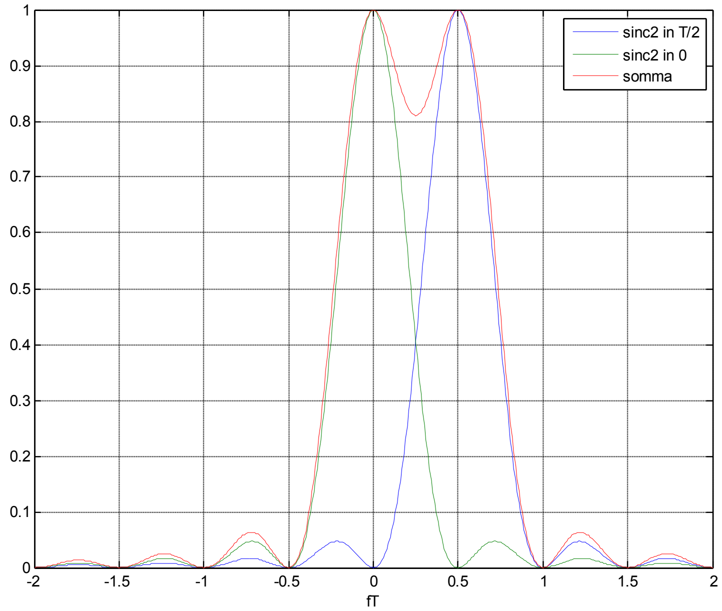


3) Calcolare l'espressione y(t) del segnale di uscita del sistema LTI e farne il grafico per $B = \frac{2}{T}$;

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \frac{1}{2} B \mathrm{sinc}^2\left(B\left(t - T/2\right)\right) + \frac{1}{2} B \mathrm{sinc}^2\left(Bt\right)$$

Per $B = \frac{2}{T}$, $y(t) = \frac{1}{T} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2}{T}\left(t - T/2\right)\right) + \frac{1}{T} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2}{T} t\right)$.

La figura sotto rappresenta y(t) per T=1 sec.



4) Il sistema introduce distorsioni di ampiezza, poiché nella banda del segnale H(f) non ha un modulo costante. E introduce distorsioni di fase perché la fase è lineare a tratti (a causa della fase di $\cos\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$).

Soluzione es. 2

1) Il filtro è un passa-basso. Calcoliamo la risposta in frequenza e il suo modulo

$$H_a(f) = H_a(s)\big|_{s=j2\pi f} = \frac{2}{(j2\pi f + 3k)} \text{ e } |H_a(f)| = \frac{2}{\sqrt{4\pi^2 f^2 + 9k^2}}$$

Per calcolare la banda a -3dB osserviamo che $|H_a(0)| = \frac{2}{3k}$. Per cui

$$\frac{|H_a(B_{-3})|^2}{|H_a(0)|^2} = \frac{4}{4\pi^2 B_{-3}{}^2 + 9k^2}\frac{9k^2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Da ciò si ricava che $B_{-3} = \frac{3k}{2\pi}$.

2) La trasformazione bilineare è data da . $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$. Sostituiamo in $H_a(s)$

$$H(z) = \frac{2}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 3k} = \frac{2\left(1+z^{-1}\right)}{\frac{2}{T}\left(1-z^{-1}\right) + 3k\left(1+z^{-1}\right)} = a\frac{z+1}{z+b}$$

con $a = \frac{2T}{2+3Tk}$ e $b = \frac{2-3Tk}{2+3Tk}$.

Il filtro converge per $|z| > \frac{|2-3Tk|}{2+3Tk} < 1$

3) Dalla funzione di trasferimento si ricava $Y(z)\left(1+bz^{-1}\right) = a\left(1+z^{-1}\right)X(z)$ da cui poi

$$y(n) = -by(n-1) + ax\left(n\right) + ax\left(n-1\right)$$

4) Abbiamo visto che la banda a -3dB del filtro analogico è data da $B_{-3} = \frac{3k}{2\pi}$. Si vuole che il filtro digitale abbia una banda B=250 Hz. A causa del warping sappiamo che la relazione tra la frequenza analogica f_a e quella digitale *f* è data da $f_a = \frac{1}{\pi T} tg\left(\pi fT\right)$. Tale relazione vale anche tra la banda a -3dB analogica e quella digitale, per cui

$$B_{-3} = \frac{3k}{2\pi} = \frac{1}{\pi T} tg\left(\pi BT\right) = \frac{1}{\pi T} tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi T}$$

Segue che $k = \frac{2}{3T} \simeq 666\,Hz$