UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

ELETTRONICA, INFORMATICA, TELECOMUNICAZIONI

I prova facoltativa di **Teoria della Decisione e della Stima** – 7/11/09

ESERCIZIO. Sia dato il seguente problema di stima. Si osserva una sequenza di variabili aleatorie $x(n)$ i.i.d. con $n = 0,1,\ldots N-1$ aventi densità di probabilità di Rayleigh $f_X(x) = \frac{2x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)u(x)$.

1) Si calcoli l'espressione dello stimatore a massima verosimiglianza (ML) di σ^2, $\hat{\sigma}^2_{ML}$.
2) Si verifichino la consistenza e l'efficienza di $\hat{\sigma}^2_{ML}$.
3) Si supponga ora che σ^2 sia una variabile aleatoria con densità di probabilità esponenziale negativa $f_{\sigma^2}(s) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{s}{\lambda}\right)u(s)$. Si calcoli lo stimatore MAP di σ^2, $\hat{\sigma}^2_{MAP}$
4) Si calcoli la polarizzazione asintotica dello stimatore MAP[1]
5) Sia $\hat{\sigma}^2_Q = a + bx^2(0)$ un possibile stimatore di σ^2. Si calcolino i coefficienti *a*, e *b* che minimizzano l'errore quadratico medio
6) In corrispondenza di questi valori dei parametri *a* e *b*, si calcoli l'errore quadratico medio di $\hat{\sigma}^2_Q$.
7) Si confrontino graficamente $\hat{\sigma}^2_Q$ e $\hat{\sigma}^2_{MAP}$ che utilizza il solo campione $x(0)$.

[1] A tal fine si utilizzi l'approssimazione in serie di Taylor $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$