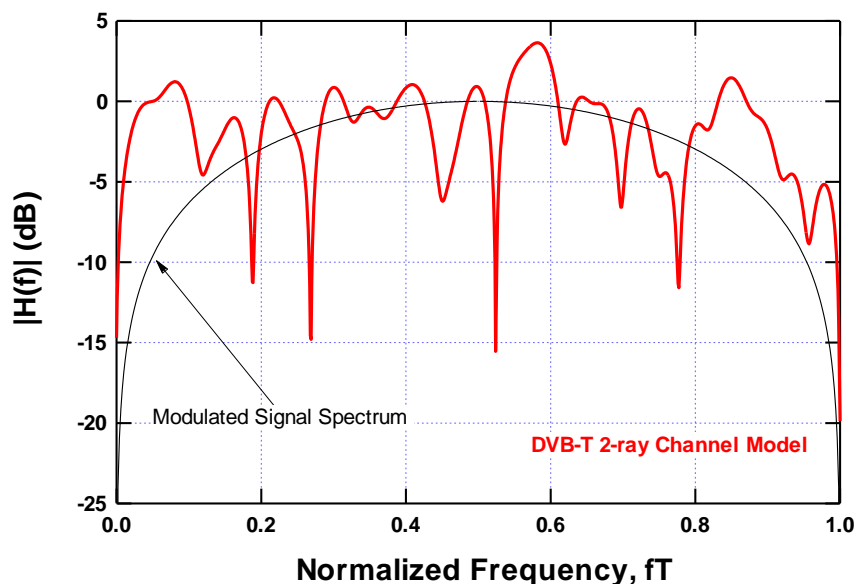
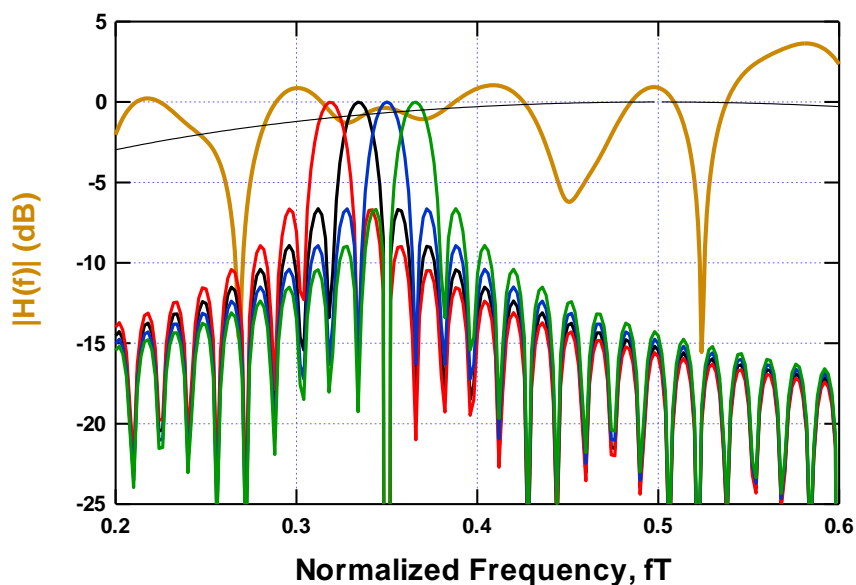


5.4 La modulazione OFDM

Dunque il segnale DVB-T a banda larga subisce distorsioni notevoli per effetto della propagazione per cammini multipli, cioè per effetto della forte selettività in frequenza del canale di trasmissione. Nel paragrafo precedente, abbiamo già discusso che eventuali tecniche di equalizzazione adattativa nel tempo di segnali con modulazioni tradizionali (QPSK, M-QAM ecc.) comporterebbero tempi di acquisizione dell'equalizzatore eccessivi. La soluzione adottata dal DVB-T per ovviare a questo problema risiede in una particolare tecnica di modulazione chiamata OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Questa scelta, convenientemente modificata, è quella stessa che è stata a suo tempo adottata nello standard di radiodiffusione audio digitale europeo DAB (Digital Audio Broadcasting) che si svolge nelle bande dell'attuale radiodiffusione FM, e la cui diffusione è al momento limitata ma in crescita continua.



(a)



(b)

Fig. MULTI

Come sappiamo, la questione della selettività in frequenza risiede nella (larga) banda del segnale che risulta confrontabile con l'inverso dei ritardi relativi tra i vari modi cammini multipli.

Questa situazione è rappresentata sinteticamente nella Fig. MULTI (a). Nella modulazione OFDM si cerca di risolvere questa questione suddividendo la trasmissione di un unico flusso dati ad alta velocità di segnalazione $1/T$ e quindi larga banda, in una *molteplicità di sotto-flussi paralleli* ottenuti suddividendo il flusso originario, e *modulando molte sottoportanti adiacenti* con ciascuno di tali flussi. Se indichiamo con N il numero di tali sotto-flussi, la cadenza di segnalazione su ogni sottoportante sarà $1/T_s = (1/T)/N$ corrispondente ad un intervallo di simbolo su ogni sottoportante $T_s = NT$. Considerando un generico “sotto-flusso” su di una generica sottoportante, la banda del segnale modulato sarà dell’ordine di $1/T_s$, e quindi N volte più piccola della banda del segnale originario mono-portante. In questo modo, aumentando N appropriatamente ci si può ricondurre al caso in cui ogni sotto-canale ha una banda molto stretta, e quindi il relativo segnale modulato “vede” una porzione della risposta in frequenza del canale di propagazione sostanzialmente *piatta* e quindi *non* distorcente. Questa situazione è riassunta in Fig. MULTI (b). Per il DVB-T sono previsti due distinti modi di trasmissione con ben 2048 oppure 8192 sottoportanti ! L’unico effetto del canale di trasmissione sul generico sotto-canale è quello di introdurre un’attenuazione e uno sfasamento sostanzialmente costanti su ogni sotto-banda: recuperando al ricevitore questi fattori di fase/ampiezza sottoportante per sottoportante si neutralizzano di fatto gli effetti del canale. Questo procedimento è assimilabile a una sorta di “equalizzazione in frequenza” del segnale ricevuto, nel senso che recuperare la fase/ampiezza di ogni sottoportante significa in pratica andare a compensare la risposta in frequenza del canale componente per componente su di un pettine di frequenze molto fitto.

Naturalmente, nella discussione precedente (di carattere euristico) non sono stati precisati alcuni aspetti importanti, tra i quali la spaziatura tra le sottoportanti, e la maniera per effettuare efficientemente l’operazione di modulazione di questi sottoflussi paralleli sulle varie sottoportanti. Indicando momentaneamente con f_{sc} la spaziatura delle sottoportanti, il segnale con modulazione multiportante è descritto dallo schema di massima di Fig. SKEME, in cui i simboli d’ingresso c_n appartengono all’alfabeto di una modulazione lineare arbitraria (tipicamente M-PSK o M^2 -QAM) e sono caratterizzati da una velocità di segnalazione $R = 1/T$. Come si nota, il flusso di tali simboli è parallelizzato in N sotto-canali su ciascuno dei quali l’intervallo di simbolo diventa $T_s = NT$ chiamato *intervallo di simbolo OFDM*. Si nota anche che il convertitore serie-parallelo induce una sorta di partizionamento “a blocchi” dei simboli d’ingresso, ove la durata di un blocco è pari a N simboli di sorgente ovvero di *un simbolo OFDM*. L’indice k risulta essere l’indice di “sottoportante” e varia da 0 a $N-1$, mentre l’indice m è l’indice temporale del generico simbolo OFDM ed è caratterizzato dalla velocità di simbolo OFDM $1/T_s = (1/T)/N$. L’espressione del segnale modulato è dunque

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} p(t - mT_s) e^{j2\pi k f_{sc} t}$$

ove $p(t)$ è un impulso rettangolare di ampiezza unitaria e diverso da zero per $0 \leq t < T_s$ e dove i simboli di sorgente $c_k^{(m)}$ sono normalizzati a potenza unitaria ($|c_k^{(m)}|^2 = 1$). Naturalmente dobbiamo essere in grado di *demodulare* questo segnale in maniera ottimale. Lo schema del demodulatore ottimo del generico sottoflusso # k in AWGN, e in assenza degli altri sottocanali, è quello di Fig. OTTIM, che prevede la conversione in banda base del segnale, il filtraggio adattato con campiona-

mento e la decisione a soglia finale. La variabile di decisione sul simbolo della sottoportante numero k è dunque ($r(t)$ =segnale ricevuto)

$$z_k^{(0)} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} r(t) e^{-j2\pi k f_{sc} t} dt$$

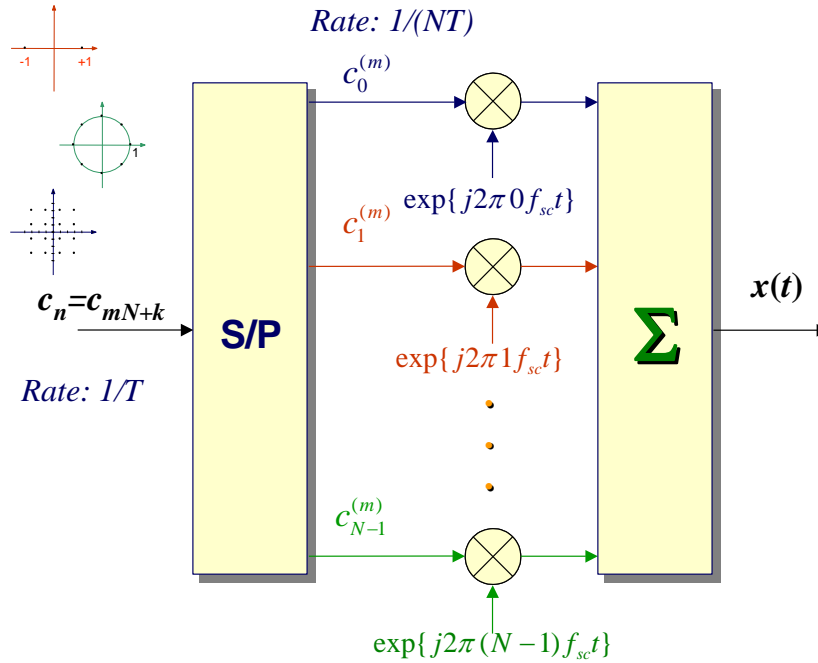


Fig. SKEME

La presenza degli altri sottocanali induce però in generale una *interferenza* sulla decisione. Calcoliamo l'effetto della presenza del sottocanale i , $i \neq k$ sulla variabile di decisione del ricevitore ottimo per il canale k . Per l'intervallo di segnalazione con $m=0$, trascurando l'effetto del rumore si ottiene una componente di interferenza :

$$I_{i,k}^{(0)} = \int_0^{T_s} c_i^{(0)} e^{j2\pi i f_{sc} t} \cdot e^{-j2\pi k f_{sc} t} dt = c_i^{(0)} \frac{e^{j2\pi(i-k)f_{sc}T_s} - 1}{j2\pi(i-k)f_{sc}}$$

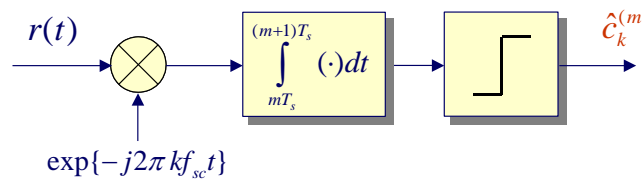


Fig. OTTIM

Questa interferenza si annulla quando $f_{sc} T_s = q$, q intero, cioè quando le sottoportanti sono *ortogonali*. Naturalmente è conveniente scegliere il *minimo* di questi valori, per tenere le sottoportanti le più vicine possibile e quindi limitare la banda del segnale modulato. Si dovrà scegliere allora

$$f_{sc} = 1/T_s = 1/(NT)$$

In queste condizioni la modulazione prende il nome di OFDM, ha la minima occupazione spettrale e i dati dei vari sottocanali possono essere recuperati senz'alcuna interferenza con una batteria di ricevitori come in Fig. OTTIM. Per ricostruire il flusso dati originario, sarà poi sufficiente "riformat-

tare” il flusso da parallelo a seriale con un convertitore P/S duale di quello di Fig. SKEME. Il segnale OFDM ha dunque la forma

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} p(t - mT_s) e^{j2\pi kt/T_s}$$

Ma qual è l’occupazione spettrale di questo segnale ? Per rispondere a questa domanda dobbiamo chiederci quale sia la densità spettrale di potenza del segnale OFDM $x(t)$. Osserviamo allora che questo è costituito dalla somma di N segnali dati *statisticamente indipendenti* ciascuno modulato su di una sottoportante diversa:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} p(t - mT_s) e^{j2\pi kt/T_s} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_m c_k^{(m)} p(t - mT_s) \right) e^{j2\pi kt/T_s} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) e^{j2\pi kt/T_s}$$

Omettendo i dettagli del calcolo, la conclusione è che la densità di potenza ha la seguente espressione:

$$S_x(f) = \sum_{k=0}^{N-1} S(f - k/T_s)$$

dove naturalmente $S(f)$ è la densità spettrale del generico sotto-flusso a velocità $1/T_s$ privato della modulazione sulla sottoportante:

$$S(f) = \frac{E\{|c_k^{(m)}|^2\}}{T_s} |P(f)|^2 = T_s \text{sinc}^2(fT_s)$$

Questa è proprio la situazione rappresentata indicativamente nella Fig. MULTI (b), nella quale la somma dei vari spettri dei sotto-canali *non* è stata effettuata, e in cui si nota anche che gli spettri dei vari sotto-canali sono *sovrapposti*. La condizione di ortogonalità delle sottoportanti garantisce però l’assenza di interferenza inter-portante e la demodulabilità dei dati. Lo spettro di potenza di un segnale OFDM con 64 e con 2048 portanti è rappresentato in Fig. SPETTRO, ove la scala della frequenza è normalizzata alla velocità di segnalazione *di sorgente* $1/T$. Si nota che la sovrapposizione dei vari spettri elementari dei sottocanali dà luogo ad uno spettro estremamente piatto in banda e con un rapido decadimento verso lo 0, e che queste caratteristiche sono tanto più accentuate quanto più alto è il numero delle sottoportanti. Il segnale OFDM non è rigorosamente limitato in banda, ma l’occupazione spettrale, definita con i consueti criteri della banda a -20 o -40 dB, o della banda al 99% della potenza, è comunque di poco maggiore della banda di Nyquist $1/T$ e quindi l’efficienza spettrale della modulazione è elevata.

Naturalmente, è necessario trovare una struttura *efficiente* di modulatori e demodulatori OFDM che implementino le necessarie operazioni appena descritte. Questa esigenza è particolarmente importante in sistemi con alto numero di portanti come il DVB-T o come il DAB in cui abbiamo $N=2048$. Per derivare la struttura di un modem digitale per OFDM, consideriamo il segnale analogico modulato $x(t)$ e campioniamolo alla cadenza $f_c = 1/T = N/T_s$. Otteniamo la sequenza

$$x[n] = x(nT_s/N) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} p(nT/N_s - mT_s) e^{j2\pi knT_s/NT_s}$$

Limitandoci al primo simbolo OFDM ($m=0$) e semplificando si ha

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} p(nT_s/N) e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} e^{j2\pi kn/N} \quad , \quad 0 \leq n \leq N-1$$

(infatti l'impulso $p(nT_s/N)$ è sempre pari a 1 nell'intervallo considerato). La sequenza $x[n]$ è pari dunque alla *antitrasformata discreta di Fourier* della sequenza degli N simboli di sorgente $c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \dots, c_{N-1}^{(0)}$ che contribuiscono a formare il simbolo OFDM n. 0. Questo suggerisce un procedimento di modulazione *efficiente* poiché la trasformata inversa può essere calcolata con un algoritmo veloce di (I)FFT. Il segnale analogico modulato (in banda base) può allora essere ottenuto sovracampionando la sequenza $x[n]$ e inviandola ad un convertitore D/A seguito da un opportuno filtro anti-immagine.

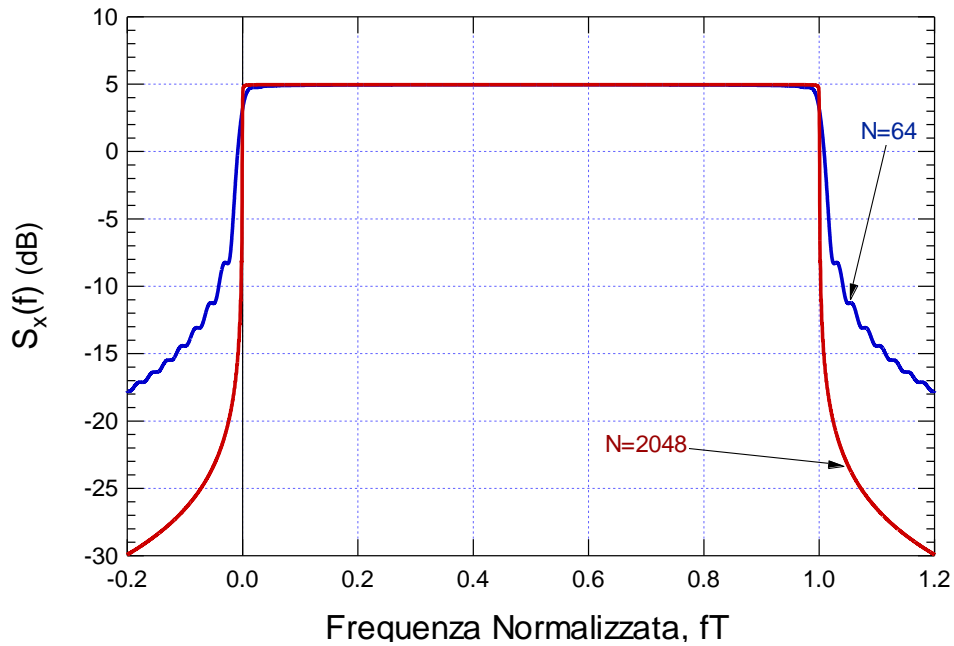


Fig. SPETTRO

Per normalizzazione, in modo cioè che la sequenza $x[n]$ abbia la stessa potenza media statistica della sequenza dei simboli di sorgente c_n , la IFFT viene poi riformulata come segue:

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} e^{j2\pi kn/N} \quad , \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Supponiamo adesso che il segnale modulato venga ricevuto senza distorsioni di canale, ma con aggiunta di rumore Gaussiano bianco:

$$r(t) = x(t) + w(t)$$

Il demodulatore per il sottocanale numero k , come già accennato, calcola la variabile di decisione

$$z_k^{(0)} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} r(t) e^{-j2\pi kt/T_s} dt$$

Campionando il segnale ricevuto alla frequenza $N/T_s = 1/T$ e approssimando l'integrale con una sommatoria si ha

$$z_k^{(0)} \cong \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad , \quad r[n] \triangleq r(nT) \quad \text{(FFTeq)}$$

pari cioè alla *trasformata discreta diretta di Fourier* della sequenza ricevuta. La trasformata viene eseguita naturalmente con un algoritmo veloce che consente di calcolare tutte le variabili di decisione in un singolo simbolo OFDM, e per normalizzazione viene riformulata come segue:

$$z_k^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} r[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

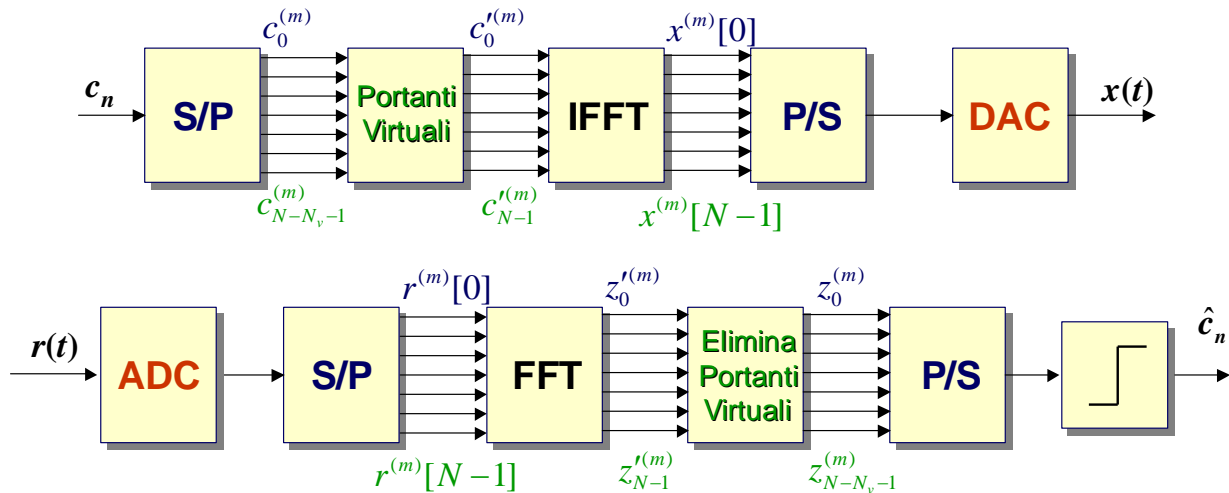


Fig. TRAS

Bisogna però assicurarsi che la velocità di campionamento $f_c = 1/T = N/T_s$ scelta per la digitalizzazione degli apparati sia adeguata alla banda del segnale. Purtroppo se immaginiamo di replicare lo spettro di Fig. SPETTRO a distanza multipla di $f_c = 1/T$, notiamo l'insorgere di un considerevole aliasing. La soluzione di questo problema è duplice: o si restringe la banda del segnale, o si aumenta la f_c . La seconda opzione non è praticabile perché non consentirebbe di eseguire le operazioni di modulazione e demodulazione OFDM attraverso algoritmi (I)FFT, come si può facilmente verificare ri-calcolando la (FFTeq) con una $f_c' > f_c$. Resta allora l'opzione della riduzione della banda del segnale, che in realtà può essere implementata con un accorgimento banale riportato in Fig. TRAS. Come si nota, oltre alle funzioni già descritte compare anche un blocco "Aggiunge portanti virtuali", mentre il numero di simboli di sorgente utili per simbolo OFDM non è pari a N ma a $N - N_v$. L'inserzione delle cosiddette "portanti virtuali" è una maniera per controllare precisamente la larghezza di banda del segnale modulato mantenendo il vincolo, per esigenza di realizzazione, sulla particolare dimensione del calcolatore di (I)FFT utilizzato nel modem (che normalmente elabora blocchi di lunghezze pari a potenze di 2). In sede di formattazione del simbolo infatti, al blocco degli $N - N_v$ simboli utili vengono *postposti* N_v simboli *nulli* in modo da arrivare alla lunghezza fissata del blocco di simboli di sorgente che contribuisce a formare il simbolo OFDM tramite IFFT. La presenza di questi simboli nulli in testa e in coda fa sì che le corrispondenti sottoportanti vengano *azzerate*, cioè diventino "virtuali" o "soppresse". Lo spettro di potenza diventa allora

$$S_x(f) = \sum_{k=0}^{N-1-N_v} S(f - k/T_s)$$

Le norme DVB-T prevedono 1705 portanti utili e 343 virtuali per il modo "2k" (cioè FFT di ordine 2048) e 6817/1375 per il modo "8k" (8192 portanti totali). Lo spettro del modo 2k con portanti vir-

tuali è confrontato in Fig. VIRTU con quello già mostrato in Fig. SPETTRO per il caso di tutte portanti attive. Le norme DVB precisano inoltre che l'intervallo di simbolo OFDM T_s è pari a $224 \mu s$ per il modo 2k e $896 \mu s$ per il modo 8k, nel caso di spaziatura dei canali televisivi di 8 MHz com'è quella italiana (bande UHF IV-V)

5.5 Equalizzazione del segnale OFDM

Torniamo adesso alla questione della compensazione delle distorsioni di canale prodotte dalla propagazione per cammini multipli. Vi sono due distinte maniere, entrambe usate in pratica, per risolvere il problema con il segnale OFDM. Indicando come di consueto con $h(t)$ la risposta impulsiva (in banda base) del canale e trascurando il rumore nel ricevitore, il segnale ricevuto sarà

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} p(t - mT_s) e^{j2\pi kt/T_s} \right) \otimes h(t)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} \left(p(t - mT_s) e^{j2\pi k(t - mT_s)/T_s} \right) \otimes h(t)$$

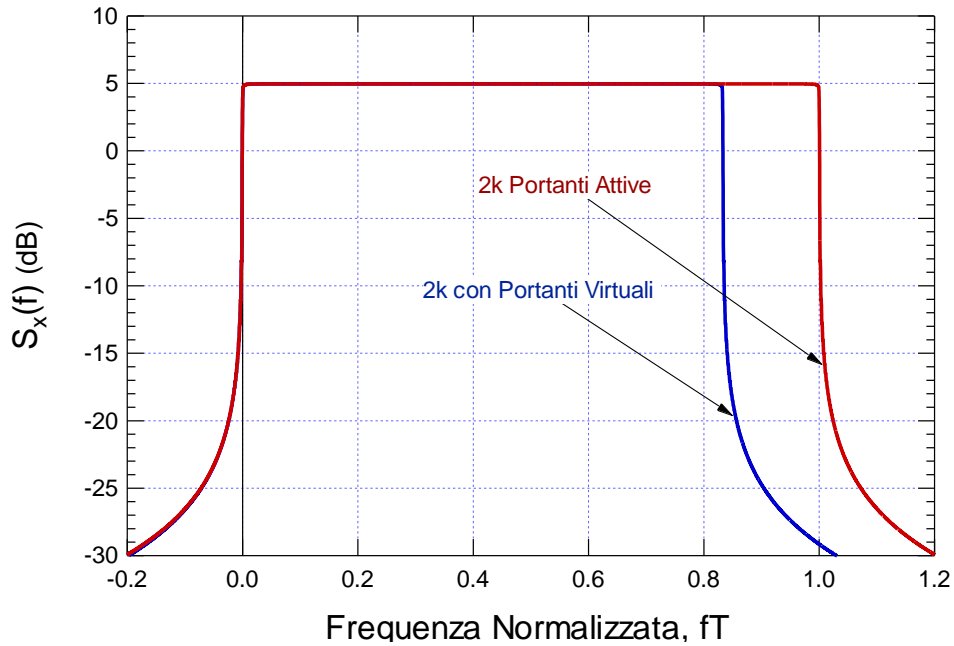


Fig. VIRTU

Chiamiamo ora $p_k(t)$ l'impulso rettangolare $p(t)$ traslato alla frequenza k/T_s , cioè $p_k(t) = p(t)e^{j2\pi kt/T_s}$. Allora

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} p_k(t - mT_s) \otimes h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_m c_k^{(m)} \gamma_k(t - mT_s)$$

ove naturalmente $\gamma_k(t)$ rappresenta il k -esimo impulso $p_k(t)$ "passato" nel canale di trasmissione $h(t)$. Concentrandoci sul k -esimo flusso dati a tempo di simbolo OFDM T_s , si nota che $\gamma_k(t)$ è proprio l'impulso elementare di tale trasmissione così come viene ricevuto nel demodulatore. Quest'impulso ha in generale una durata maggiore di T_s per effetto della distorsione di canale. Se la risposta impulsiva del canale ha durata finita pari a T_h , la durata di $\gamma_k(t)$ è pari a $T_s + T_h$. È possibile allora evitare l'interferenza intersimbolica (chiamata anche interferenza inter-blocco) causata dal

canale spaziando i simboli OFDM di un intervallo *maggiore di* T_s , e precisamente aumentato di una quantità T_g chiamata *intervallo di guardia*. Se infatti l'intervallo di guardia è scelto in modo che $T_h \leq T_g$, due impulsi consecutivi $\gamma_k(t)$ e $\gamma_k(t - (T_s + T_g))$ non si sovrappongono e l'ISI non si produce. Il segnale trasmesso sarà allora:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(m)} p(t - m(T_s + T_g)) e^{j2\pi k(t - m(T_s + T_g))/T_s}$$

In pratica, si introduce un "gap" temporale tra due simboli OFDM consecutivi nel quale il segnale modulato viene annullato. In ricezione, la "coda" del simbolo OFDM nell'intervallo di guardia viene semplicemente ignorata e lasciata fuori dal blocco di N campioni su cui calcolare la FFT.

Naturalmente l'uso dell'intervallo di guardia peggiora l'efficienza spettrale del sistema: dovendo mantenere una velocità d'informazione costante, introdurre un intervallo di guardia diverso da 0 significa dover *ridurre* il tempo di simbolo OFDM T_s e quindi *aumentare* la banda utilizzata sul canale che è grosso modo pari a N/T_s . D'altro canto, sappiamo che i ritardi massimi che si incontrano nelle bande di interesse quando la propagazione avviene per cammini multipli sono dell'ordine di qualche decina di μs , che è poi l'ordine di grandezza dell'intervallo di guardia che deve essere adottato per avere protezione dal multipath. Considerando che l'intervallo di simbolo è pari a qualche *centinaio* di μs , la perdita di efficienza è modesta. Naturalmente, questo avviene proprio perché la durata dei simboli *su ogni sottoportante* è di parecchio maggiore di quella della risposta del canale. Viceversa, in una modulazione monoportante, la durata del simbolo è pienamente confrontabile con quella della risposta del canale, e un approccio simile porterebbe a intervalli di guardia eccessivamente lunghi e penalizzanti l'efficienza.

Questa caratteristica di poter trattare facilmente canali con "echi" aventi ritardi notevoli permette di risolvere anche una questione importante in una rete di radiodiffusione. Infatti, il meccanismo di protezione dal multipath funziona sia nel caso in cui l'"eco" si produce naturalmente come discusso finora, ma anche nel caso in cui l'eco proviene *da un diverso ripetitore della stessa rete operante sulla stessa frequenza* (potremmo chiamarlo "eco artificiale"). Questo semplifica notevolmente il progetto e l'esercizio delle cosiddette *reti a singola frequenza* (SFN) per la diffusione di un canale televisivo su di un'unica frequenza a diffusione regionale o nazionale. C'è da osservare che i ritardi di canale "artificiali" di una SFN sono in genere assai maggiori di quelli "naturali" del multipath, e quindi i requisiti di intervallo di guardia devono essere adattati alla bisogna.

L'approccio dell'intervallo di guardia ha uno svantaggio che deve essere preso in seria considerazione: per poter effettuare correttamente la demodulazione, in particolare per poter correttamente calcolare la FFT, il ricevitore deve esattamente allinearsi alla parte utile del simbolo OFDM e deve ignorare l'intervallo di guardia. Quest'esigenza pone vincoli molto stretti alla *sincronizzazione di simbolo* nel ricevitore. Modificando leggermente il formato del segnale modulato però, è possibile ottenere un buon funzionamento del ricevitore anche con errori di sincronizzazione di simbolo non trascurabili, purché naturalmente di entità limitata, e contemporaneamente continuare a risolvere la questione dell'ISI (IBI). La modifica consiste nel "riempire" l'intervallo di guardia con una *estensione ciclica* o *prefisso ciclico* del simbolo OFDM, cioè con la ripetizione degli iniziali T_g secondi sui T_s totali del simbolo stesso. Nel modulatore, questo si fa in pratica "anteponendo" agli

N valori ottenuti all'uscita del calcolatore di IFFT gli ultimi N_g valori ottenuti dallo stesso, intendendo che $T_g = N_g T_s / N$ (Fig. CYC (a)). Qual è lo scopo del prefisso ciclico ? Lo scopo è quello di "emulare" una condizione in cui il segnale all'ingresso del canale fosse *periodico di periodo T_s* . Questo segnale periodico ideale sarebbe, concentrandoci sulla ricezione del simbolo con $m=0$,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} e^{j2\pi kt/T_s} \quad .. \quad 0 \leq t < T_s \quad , \quad x(t) = x(t+T_s)$$

e quindi lo spettro del segnale in ingresso al canale sarebbero *a righe* con frequenza fondamentale $1/T_s$. Dalla stessa formulazione del segnale modulato, si vede che il k -esimo coefficiente di Fourier nello spettro a righe sarebbe banalmente $X_k = c_k^{(0)}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Allora anche il segnale $y(t)$ in uscita dal canale sarebbe periodico dello stesso periodo, e il suo k -esimo coefficiente di Fourier sarebbe

$$Y_k = X_k H\left(\frac{k}{T_s}\right) = c_k^{(0)} H\left(\frac{k}{T_s}\right)$$

ove evidentemente $H(f)$ è la risposta in frequenza del canale di trasmissione. D'altro canto, il circuito di Fig. OTTIM che produce la variabile di decisione $z_k^{(0)}$ per il generico k -esimo sottocanale non è altro che un "calcolatore di coefficiente di Fourier" per cui la conclusione è che (trascurando il rumore di ricezione)

$$z_k^{(0)} = Y_k = c_k^{(0)} H\left(\frac{k}{T_s}\right)$$

Adesso, un errore di sincronismo εT_s sul riconoscimento dell'inizio del blocco semplicemente risulta in una "traslazione ciclica" nel verso opposto del segnale osservato dal "calcolatore di coefficiente di Fourier" (Fig. CYC (b)) per cui la variabile di decisione risulta in queste nuove condizioni

$$z_k^{(0)} = c_k^{(0)} H\left(\frac{k}{T_s}\right) e^{j2\pi k \varepsilon}$$

Naturalmente, affinché la condizione di (pseudo)periodicità si verifichi, l'intervallo di guardia deve essere *allungato* di un fattore pari proprio al massimo errore di sincronismo $\varepsilon_{MAX} T_s$ che si desidera tollerare.

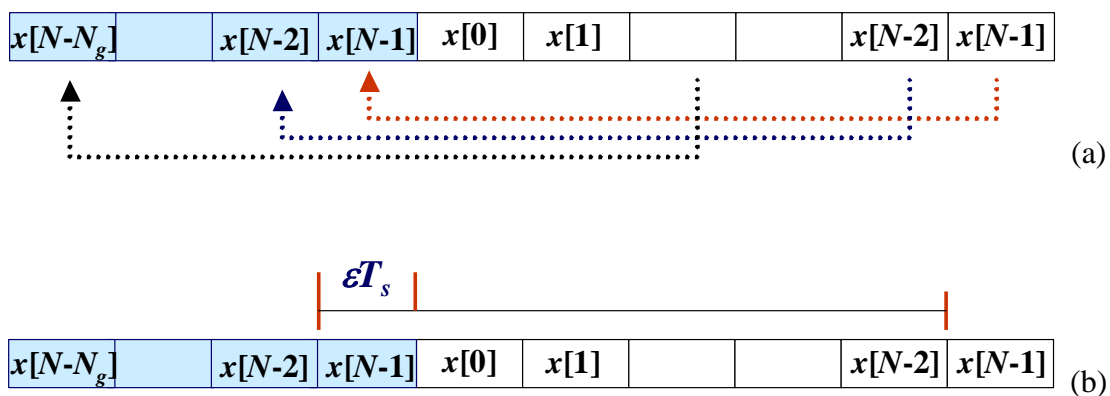


Fig. CYC

Riprendendo in considerazione la presenza del rumore di ricezione e generalizzando all'intervallo di simbolo OFDM m -esimo si ha:

$$z_k^{(m)} = c_k^{(m)} H \left(\frac{k}{T_s} \right) e^{j2\pi k \varepsilon} + w_k^{(m)} \quad , \quad k = 0, \dots, N-1$$

Poiché comunque l'andamento della risposta in frequenza del canale è arbitrariamente variabile e deve essere compensato sottoportante per sottoportante, conviene introdurre la risposta del canale modificata dall'errore di sincronismo

$$H'_k \triangleq H \left(\frac{k}{T_s} \right) e^{j2\pi k \varepsilon}$$

per ottenere l'espressione finale della k -esima variabile di decisione in presenza di distorsione di canale, errore di sincronismo e rumore:

$$z_k^{(m)} = c_k^{(m)} H'_k + w_k^{(m)} = c_k^{(m)} |\tilde{H}_k| e^{j\angle \tilde{H}_k} + w_k^{(m)}$$

In ogni caso, si nota che l'effetto combinato di canale ed errore di sincronismo provoca una rotazione di fase e una variazione di ampiezza variabile da sottoportante a sottoportante sui simboli di informazione. Le rotazioni di fase devono essere recuperate comunque per avere una ricezione ottima coerente; nel caso di costellazioni di simboli ad ampiezze multiple (ad esempio M^2 -QAM) deve essere recuperata anche l'ampiezza. La presenza del prefisso ciclico permette però di compensare automaticamente gli errori di sincronismo nel momento in cui viene compensata la rotazione di fase di ogni sottoportante.

La compensazione della distorsione di canale (ed eventualmente degli errori di sincronismo) può essere effettuata facilmente se è disponibile una *stima* della risposta in frequenza del canale in corrispondenza di ogni sottoportante. Un possibile schema di equalizzazione è quello mostrato in Fig. EQUALO, la cui bontà è strettamente legata alla bontà dello *stimatore di canale*

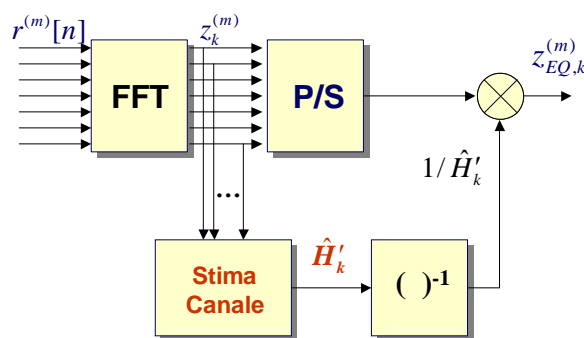


Fig. EQUALO

Infatti la variabile di decisione "equalizzata" $z_{EQ,k}^{(m)}$ è pari a

$$z_{EQ,k}^{(m)} = \frac{H'_k}{\hat{H}'_k} c_k^{(m)} + \frac{1}{\hat{H}'_k} w_k^{(m)} \cong c_k + w_k^{(m)}$$

ove l' "uguale circa" tiene conto degli errori di stima della risposta del canale. Per la modalità con cui viene effettuata, questo tipo di compensazione delle distorsioni di canale è nota come "equalizzazione in frequenza" ed è tipica della modulazione OFDM o multiportante in generale.

Naturalmente, l'introduzione di portanti virtuali e prefisso ciclico fa cambiare la relazione tra il symbol rate $1/T$ di partenza e l'occupazione spettrale del segnale. Infatti il "blocco" di simboli che viene elaborato dall'IFFT processor nel modulatore è costituito da $N - N_v$ simboli e quindi occupa un periodo di tempo $(N - N_v)T$. Questo periodo, per mantenere il vincolo del tempo reale, deve essere uguale al tempo di simbolo OFDM di uscita, *aumentato della durata T_g del prefisso ciclico*. Chiamando T'_s la nuova durata del simbolo OFDM di uscita si deve cioè avere $(N - N_v)T = T'_s + T_g$. Nel tempo di simbolo OFDM T'_s devono essere contenuti gli N campioni di uscita dalla IFFT, e quindi il nuovo intervallo di campionamento del DAC deve essere pari a $T'_c = T'_s / N = [(N - N_v)T - T_g] / N$. La spaziatura tra le sottoportanti così come vengono generate dalla IFFT è ora pari a $1/(NT'_c)$, e quindi la banda occupata dal segnale OFDM completo di portanti virtuali e prefisso ciclico è

$$B_{OFDM} = (N - N_v) / (NT'_c) = \frac{(N - N_v)}{(N - N_v)T - T_g} = \frac{1}{T} \frac{(N - N_v)}{(N - N_v) - T_g / T}$$

che permette di collegare il symbol rate disponibile alla banda allocata. Spesso la lunghezza del prefisso ciclico viene espressa in numero di campioni N_g alla frequenza di campionamento di uscita $1/T'_c$, cioè

$$N_g = T_g / T'_c = \frac{NT_g}{(N - N_v)T - T_g} \Rightarrow T_g = N_g \frac{(N - N_v)T}{N + N_g}$$

da cui infine

$$B_{OFDM} = \frac{1}{T} \frac{(N - N_v)}{(N - N_v) - T_g / T} = \frac{1}{T} \frac{1}{1 - N_g / (N + N_g)} = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{N_g}{N} \right)$$

dove si nota chiaramente che l'introduzione delle portanti virtuali non cambia la banda del segnale, mentre quella del prefisso ciclico ovviamente sì.

Nel DVB-T la stima di canale viene facilitata dalla presenza di un certo numero di *sottoportanti pilota* costituite da simboli $c_{p,k}$ di valore fisso e noto al ricevitore (perché fissato dallo standard) sulle quali basare la stima di $H(f)$ su particolari sottoportanti. Il valore nelle altre sottoportanti può essere ricavato per *interpolazione* tra due valori noti consecutivi. Le portanti pilota sono trasmesse con una potenza leggermente maggiore (di un fattore 16/9) rispetto ai simboli informativi di sorgente, e sono di due tipi: portanti *fisse*, cioè piazzate in ogni simbolo OFDM sulle stesse sottoportanti, in numero di 45 (177) per il modo 2k (8k), e *sparse* (scattered) cioè piazzate su sottoportanti variabili da simbolo a simbolo. In particolare, la trama DVB-T prevede una periodicità di 68 simboli OFDM con una variabilità delle pilota sparse nei simboli della trama, come indicato in

Fig. TRAMA¹, ove le pilota sono indicate da cerchi scuri, mentre i simboli di sorgente informativa sono i cerchi chiari. Le portanti sparse servono ad evitare la possibilità che una portante fissa cada in un nullo profondo della risposta del canale e sia sistematicamente inutilizzabile per la stima della risposta dello stesso. Variando il piazzamento della sottoportante da simbolo a simbolo questa eventualità diventa a bassissima probabilità.

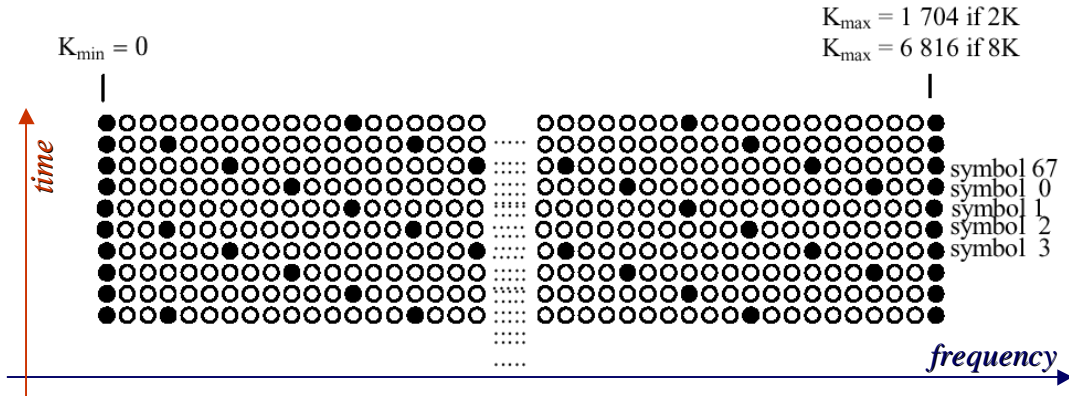


Fig. TRAMA

Il calcolo delle prestazioni in termini di BER della modulazione OFDM è semplice nel caso in cui la stima del canale venga ipotizzata priva di errori. Questo risultato non è realistico, ma fornisce una sorta di “limite inferiore” al di sotto del quale nessun ricevitore può scendere. Prendiamo in considerazione la variabile di decisione k -esima in uscita al calcolatore di FFT:

$$z_k^{(m)} = c_k^{(m)} H_k' + w_k^{(m)} = c_k^{(m)} |\tilde{H}_k| e^{j\angle \tilde{H}_k} + w_k^{(m)}$$

È semplice dimostrare che $w_k^{(m)}$ è una variabile aleatoria Gaussiana complessa con componenti reale/immaginaria indipendenti e a media nulla aventi ciascuna varianza $\sigma_w^2 = N_0/T_s$. Compensando (idealmente) la distorsione di canale, si ottiene la variabile di decisione equalizzata

$$z_k^{(m)} = c_k^{(m)} H_k' + w_k^{(m)} = c_k^{(m)} + w_k'^{(m)}$$

ove $w_k'^{(m)}$ ha le stesse caratteristiche di $w_k^{(m)}$, a parte la varianza che vale ora $\sigma_w'^2 = (N_0/T_s) / |\tilde{H}_k|^2$. La probabilità di errore sulla k -esima sottoportante sarà dunque, riferendoci per semplicità alla modulazione QPSK, in cui $c_k^{(m)} \in \{\pm 1/\sqrt{2} \pm j/\sqrt{2}\}$

$$P_{e,k} = Q\left(\sqrt{\frac{1/2}{(N_0/T_s)/|\tilde{H}_k|^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(|\tilde{H}_k|^2/2) \cdot T_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_{s,k}}{N_0}}\right)$$

ove $E_{s,k}/N_0$ è il rapporto segnale/rumore sulla sottoportante k -esima. Considerando tutte le sottoportanti attive (in numero N_a), la probabilità di errore media è

¹ Interpretando il piazzamento delle portanti lungo l'asse ortogonale del tempo, le pilota possono essere utilizzate anche per la stima di un canale lentamente variabile nel tempo o addirittura per equalizzare il segnale in tempo/frequenza con una interpolazione bidimensionale dei valori di risposta di canale stimati per i vari punti sul piano tempo/frequenza.

$$P_e = \frac{1}{N_a} P_{e,k} = \frac{1}{N_a} \sum_{k=0}^{N_a-1} Q\left(\sqrt{\frac{E_{s,k}}{N_0}}\right)$$

che può essere calcolata ad esempio in riferimento al modello di canale DVB-T standard di Tab. CANA. Il risultato è mostrato in Fig. BEROF per il modo 2k in funzione del rapporto segnale-rumore massimo $E_{s,\max}/N_0$, quello cioè relativo alla sottoportante di massima ampiezza. Risultati analoghi si ottengono per la modulazione M²-QAM, il cui studio è lasciato per esercizio al lettore. Si capisce in particolare che si può verificare una situazione spiacevole. Infatti, può accadere che il rapporto segnale-rumore sia in media piuttosto buono su tutte le sottoportanti, dando un contributo alla P_e totale sostanzialmente trascurabile, ma che vi sia un piccolo numero di sottoportanti corrispondenti proprio a nulli profondi della risposta del canale. Per queste (poche) sottoportanti, il rapporto segnale-rumore sarà pessimo, e la $P_{e,k}$ molto alta, degradando così la P_e totale. In queste condizioni, anche se il rapporto segnale-rumore è in generale buono, la qualità del collegamento non lo è altrettanto a causa della risposta del canale, e diventa necessaria una qualche forma di codifica a protezione d'errore.

Il tallone d'Achille della modulazione OFDM risiede nella grande sensibilità delle prestazioni appena ricavate all'inevitabile instabilità di frequenza Δf della portante recuperata nel ricevitore per la demodulazione in banda base del segnale ricevuto. Se infatti per una modulazione tradizionale questa instabilità deve essere di molto più piccola della velocità di segnalazione $1/T$ (cioè si deve avere $\Delta f \ll 1/T$), per il segnale OFDM questa instabilità deve essere molto più piccola della velocità di segnalazione *su ogni sottoportante*, pena l'insorgere, come si capisce facilmente di *interferenza inter-portante*:

$$\Delta f \ll 1/T_s = (1/T)/N$$

Si ha cioè un requisito di stabilità di frequenza *migliaia di volte* più stringente di quello relativo ad una modulazione tradizionale. Questo complica il progetto degli oscillatori e dei sistemi di recupero dei sincronismi del ricevitore.