Esercitazione su sistemi di due variabili aleatorie

1) Si consideri un sistema di due variabili continue congiuntamente normali. In questo caso la densità di probabilità congiunta si deve poter esprimere come

$$f_{X,Y}(x,y) = C^2 e^{-(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey)}$$

con $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey \geq 0$

per la proprietà di normalizzazione questa può essere scritta come

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\varrho^2}} e^{-\frac{1}{2\pi(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x-\eta_X)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\eta_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\varrho(x-\eta_X)(y-\eta_y)}{\sigma_X\sigma_y}\right]}$$

Fare il grafico di questa densità, a partire dalla formula, per $\eta_X = 5$ e $\eta_Y = 10$ e deviazioni standard pari a $\sigma_X = 2$ e $\sigma_Y = 10$, e valori di ϱ variabili a piacere.

2) Si consideri il vettore aleatorio $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$ con X e Y variabili aleatorie gaussiane, con valori medi pari a $\eta_X = 5$ e $\eta_Y = 10$ e deviazioni standard pari a $\sigma_X = 2$ e $\sigma_Y = 10$ e valori di covarianza scelti dall'utente. Utilizzare per la generazione il commando mvnrd.
Si fa notare come la covarianza debba essere tale che $|c_{XY}| \leq \sigma_X\sigma_Y$ e quindi $|\varrho| \leq 1$. Questo pone dei vincoli (scelte le deviazioni standard sulla scelta della covarianza).

   - Fare l'istogramma bidimensionale delle coppie di valori (X(i),Y(i)) (si può usare histogram2)
   - Fare l'istogramma in modo da determinare le densità di probabilità marginali di X e di Y. In questo caso, si chiede di pensare se e come sia possibile ottenere questo a partire dai valori dell'istogramma bidimensionale.

3) Si consideri una variabile aleatoria X gaussiana con valore medio η_X e deviazione standard σ_X a piacere. Si consideri adesso

$$\mathrm{y = a + bx + \varepsilon}$$

Dove ε è gaussiana con varianza σ^2 e valore medio nullo.
Fare lo scatter plot dei dati (x(i), y(i))
Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione tra x e y per diversi valori di b e σ^2.