Esercizio 1.

Il segnale s(t), periodico di periodo T_0, possiede lo sviluppo in serie di Fourier dato dati seguenti coefficienti

$S_n = -j\dfrac{A}{\pi n}\left(\cos(\pi n)-1\right)$ per n≠0 e S_n=0 per n=0.

1) Dire se il segnale s(t) è
- □ Reale
- □ Complesso

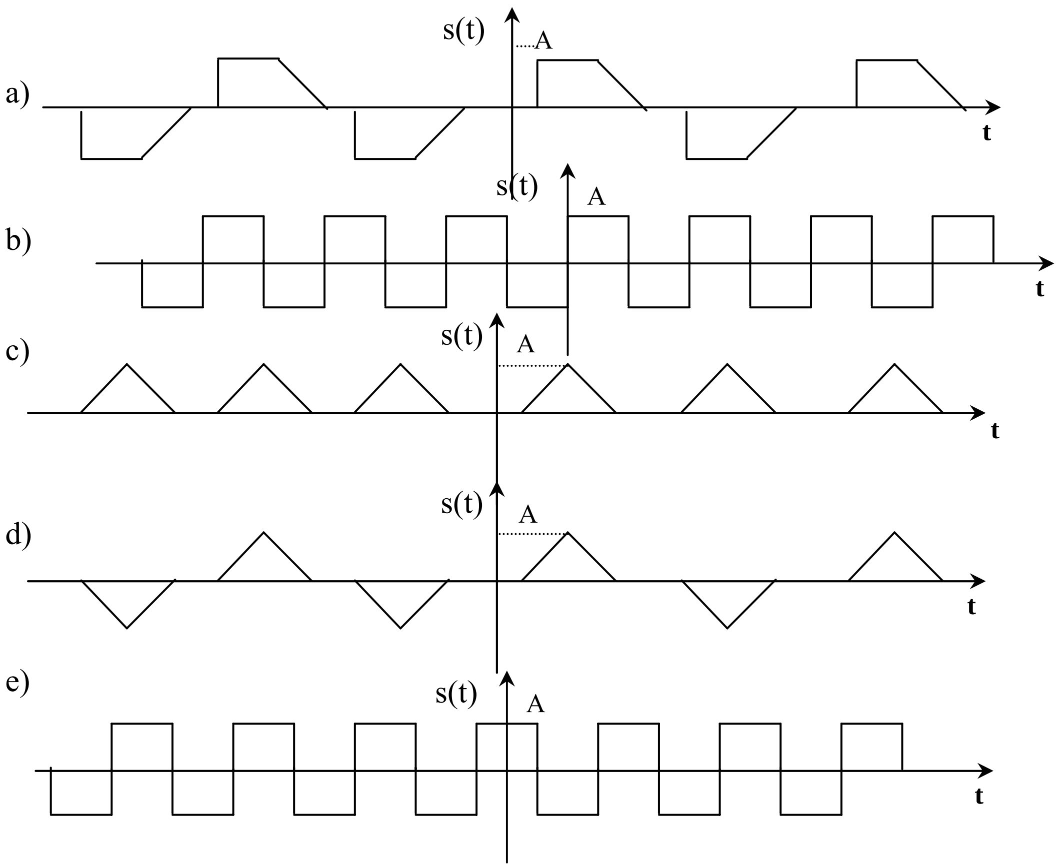
2) Presenta
- □ Simmetria Pari
- □ Simmetria Dispari
- □ Non presenta simmetrie

Motivare le risposte date.

3) Tracciare i grafici modulo-fase e parte reale-parte immaginaria dei coefficienti S_n per n=±1,±2,±3,±4

4)Considerata la forma esponenziale dello sviluppo in serie di Fourier $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} S_n e^{j2\pi n\frac{t}{T_0}}$, tracciare il grafico, sul piano complesso, dei fasori relativi a n=±3, all'istante t=0

5) Indicate tra i seguenti segnali quale secondo voi possiede lo sviluppo in serie di Fourier descritto dai coefficienti dati e perché:



Esercizio n. 2

Un segmento di segnale la cui frequenza massima sia fmax=1 MHz venga campionato su N= 1000 punti alla frequenza di Nyquist. Calcolare la lunghezza temporale del segmento di segnale.

Esercizio n. 3

Supponiamo di effettuare l'operazione di convoluzione tra due segmenti di segnali le cui lunghezze sono N = 500 punti e M =1001 punti. Nell'ipotesi che il segnale dopo l'operazione di convoluzione duri t=1 sec., calcolare la distanza tra due campioni successivi.

Soluzioni

Esercizio 1

1) Affinché un segnale periodico sia reale, i relativi coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier devono soddisfare la relazione

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{S}^{*}_{-\boldsymbol{n}}$$

in questo caso si ha

$$\boldsymbol{S}_{-\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{A}}{\pi(-\boldsymbol{n})}\left(cos(\pi(-\boldsymbol{n}))-1\right) = +\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{A}}{\pi\boldsymbol{n}}\left(cos(\pi\boldsymbol{n})-1\right) = \boldsymbol{S}^{*}_{\boldsymbol{n}}$$

quindi il segnale s(t) è reale

2) Affinché un segnale periodico sia dispari, i relativi coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier devono soddisfare la relazione

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{S}_{-\boldsymbol{n}}$$

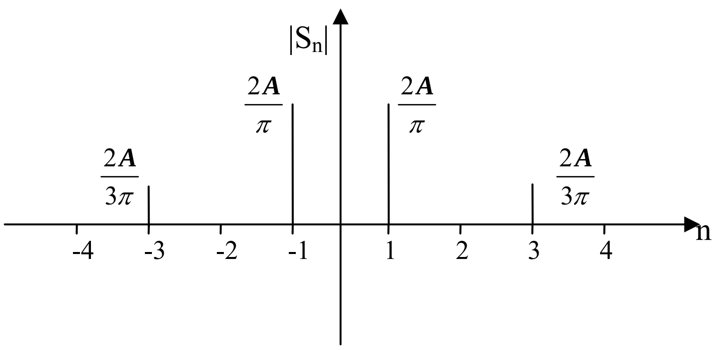
si vede che questa è verificata, quindi il segnale presenta simmetria dispari.
Inoltre **visto che il segnale è anche reale**, segue che i coefficienti sono immaginari puri.

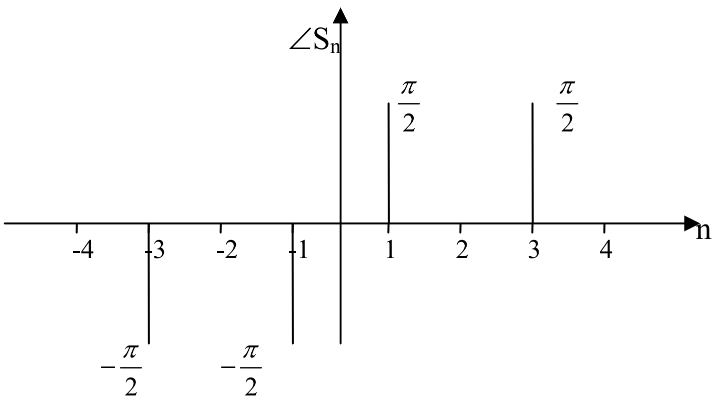
N.B. Non è vero il contrario: ovvero coefficienti immaginari puri non implicano segnale dispari.

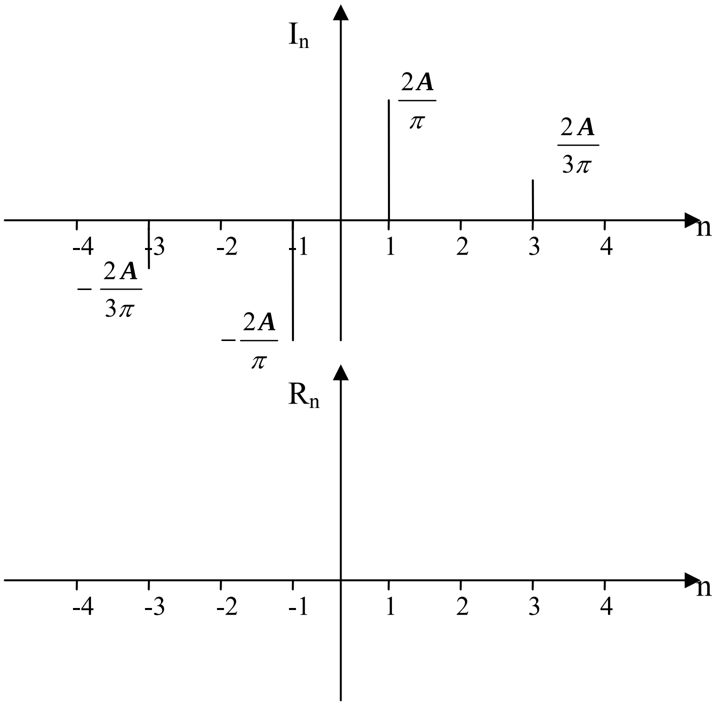
3)

$$\boldsymbol{S}_1 = -\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{A}}{\pi}\left(cos(\pi)-1\right) = +\boldsymbol{j}\frac{2\boldsymbol{A}}{\pi} \qquad \boldsymbol{S}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{S}_3 = -\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{A}}{3\pi}\left(cos(3\pi)-1\right) = +\boldsymbol{j}\frac{2\boldsymbol{A}}{3\pi} \qquad \boldsymbol{S}_4 = 0$$

$$\boldsymbol{S}_{-1} = -\boldsymbol{j}\frac{2\boldsymbol{A}}{\pi} \qquad \boldsymbol{S}_{-2} = 0 \qquad \boldsymbol{S}_{-3} = -\boldsymbol{j}\frac{2\boldsymbol{A}}{3\pi} \qquad \boldsymbol{S}_{-4} = 0$$





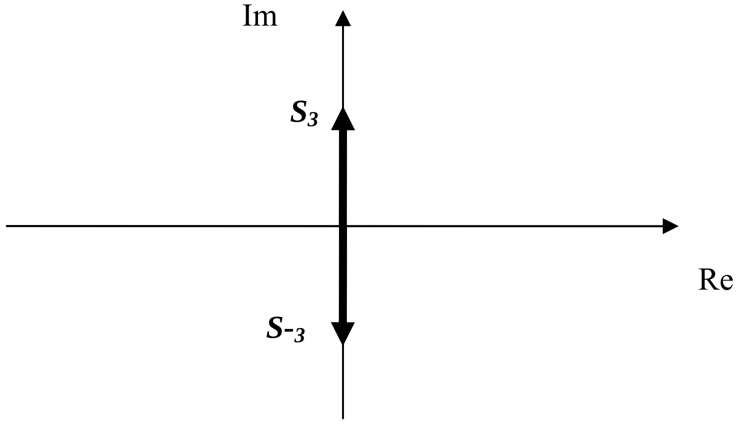


4)

I fasori per n=3 e n=-3 sono rispettivamente

$\boldsymbol{s}_3(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{S}_3 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}6\pi \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{T}_0}}$ e $\boldsymbol{s}_{-3}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{S}_{-3} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}6\pi \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{T}_0}}$

in t=t valgono $\boldsymbol{s}_3(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{S}_3$ $\boldsymbol{s}_{-3}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{S}_{-3}$, per cui, sul piano di Gauss



5) Le proprietà di simmetria prima dichiarate ci portano ad escludere il segnale a), perché né pari né dispari (in questo caso è un segnale alternativo) e i segnali c) ed e) perché pari.

La scelta tra i segnali b) e d) viene fatta sulla base dell'andamento del modulo dei coefficienti che tendono a zero $\propto \frac{1}{\boldsymbol{n}}$ come nel caso dell'onda quadra che presenta discontinuità brusche. Queste non sono presenti nel segnale d) i cui coefficienti presentano un andamento del modulo a zero $\propto \frac{1}{\boldsymbol{n}^2}$.

Esercizio 2

La frequenza di campionamento di Nyquist, se fmax= 1 MHz, è fs=2*fmax=2 MHz.

Ne deriva un tempo di campionamento
Ts=1/fs=0.5 μsec

La lunghezza temporale del segnale è quindi Ttot=N*Ts=1000*0.5 μs=0.5 msec

Esercizio n. 3

La lunghezza, in termini di campioni, del segnale ottenuto dalla convoluzione è L=N+M-1=500+1001-1=1500
Dato che temporalmente questo segnale dura t=1 sec, allora il tempo di campionamento e quindi la distanza tra due campioni successivi è

T=t/L=1 sec /1500=0.67 msec