**Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) a Tempo Discreto**

Definiamo il sistema tramite una trasformazione $T[\cdot]$.
La proprietà di linearità implica che $T[\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]] = \alpha_1 T[x_1[n]] + \alpha_2 T[x_2[n]]$
La proprietà di tempo invarianza implica che, se si indica $y[n] = T[x[n]]$, allora $y[n - n_0] = T[x[n - n_0]]$.

Dato che ogni sequenza $x[n]$ può essere vista come una somma impulsi discreti $\delta[n]$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Dalla proprietà di un sistema *LTI*

$$\begin{aligned} y[n] &= T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T[\delta[n-k]] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] \otimes h[n] \end{aligned} \qquad 1)$$

con $h[n] = T[\delta[n]]$ risposta impulsiva del sistema. Questa è una delle rappresentazioni possibili per un sistema LTI.

*Rappresentazione in frequenza di un sistema LTI.*

Una sequenza $x[n]$ può essere scritta come

$$x[n] = T\int_0^{1/T} \overline{X}(f) e^{j2\pi nfT} df$$

ovvero come la somma di oscillazioni complesse $\frac{T}{2\pi}\overline{X}(f)e^{j2\pi nfT}d\omega$

Questo risultato è molto significativo se si nota che funzioni del tipo $e^{j\omega n}$ sono autofunzioni di un sistema LTI. Grazie a questa proprietà la rappresentazione del sistema utilizzando la base di Fourier risulta vantaggiosa. Vediamo di capire meglio il motivo considerando in ingresso al sistema la sequenza $x[n] = e^{j\omega n}$; l'uscita del sistema si può quindi calcolata come

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

il termine $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}$ è la trasformata di Fourier di $h[n]$ e prende il nome di risposta in frequenza del sistema. Questa è una quantità complessa e quindi è possibile scrivere

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}e^{j\omega n} \qquad 2)$$

*Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti*

La terza rappresentazione che si prende in esame è la seguente

$$\sum_{r=0}^{M-1} b_r\, y[n-r] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, x[n-k] \qquad \text{con } a_k \text{ e } b_r \text{ costanti.}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{b_0} x[n-k] - \sum_{r=1}^{M-1} \frac{b_r}{b_0} y[n-r]$$

se applichiamo la trasformata $Z$ si ottiene.

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{b_0} X(z) z^{-k} - \sum_{r=1}^{M-1} \frac{b_r}{b_0} Y(z) z^{-r}$$

dalla quale si ricava la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{\sum_{r=0}^{M-1} b_r z^{-r}} \qquad 3)$$

Consideriamo un sistema stabile e causale (poli della funzione con modulo minore di 1 e cerchio di raggio unitario $z = e^{j\omega}$ appartenente alla regione di convergenza), in questo caso è possibile stimare la risposta in frequenza del sistema dal calcolo di

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

*Esempio di Filtro IIR*

Consideriamo il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento nel dominio $Z$ (confronta pag. 100 libro di testo).

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{z-1}{z+a}$$

il polo è pari a $z = -a$, se $|a| < 1$ e il sistema è causale è possibile determinare la risposta in frequenza calcolando la funzione di trasferimento per $z = e^{j\omega}$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} + a}$$

***Nota Matlab 1***

Vengono mostrati due modi per stimare la risposta in frequenza del sistema causale e stabile data la funzione di trasferimento in $z$.

1) Si devono scegliere i punti della pulsazione rispetto ai quali calcolare la risposta in frequenza. Nel caso di pulsazione normalizzata $\omega = [-\pi : d\omega : \pi]$ con $d\omega$ risoluzione nella pulsazione. Possono essere quindi calcolati i vettori $z = \exp(j * \omega)$ e, a seguire,

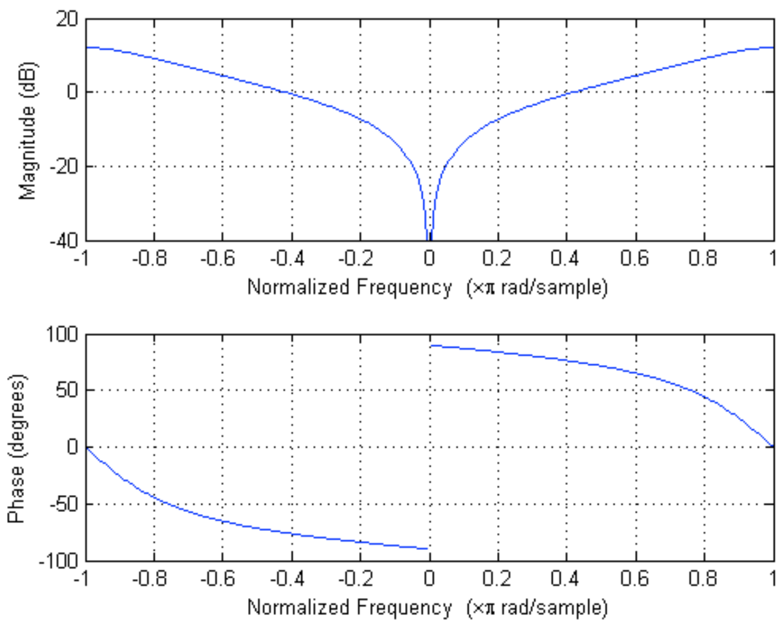
$H = (1 - z\hat{}-1)./(1 - a * z\hat{}-1).$
La risposta in frequenza può essere rappresentata in modulo $plot(\omega, abs(H))$, e fase $plot(\omega, angle(H))$

2) Si può utilizzare la funzione $freqz(\cdot)$ per stimare la risposta in frequenza direttamente dalla descrizione in $z^{-1}$ della funzione di trasferimento. Nella documentazione Matlab, i coefficienti del numeratore della funzione di trasferimento vengono descritti dal vettore $B = [b(1)\, b(2) \ldots b(N)]$ mentre quelli del denominatore $A = [a(1)\, a(2) \ldots a(M)]$. Si noti che la notazione è diversa da quella usata nel libro di testo, avendo invertito le lettere per indicare numeratore e denominatore. È possibile calcolare la risposta in frequenza in corrispondenza dei punti del vettore $\omega = [-\pi : d\omega : \pi]$, tramite il comando $H = freqz(B, A, \omega)$. N.B. omettendo l'uscita viene fornito direttamente il grafico della risposta in frequenza.

*Esempio*

Vediamo la risposta in frequenza del filtro *IIR* appena definito con a=0.5.

```
>> B=[1 -1]; %numeratore
>> A=[1 0.5]; %denominatore
>> dw=pi/200; %scegliamo una risoluzione in frequenza
>> w=[-pi:dw:pi]; % pulsazione normalizzata
>> freqz(B,A,w)
```




oppure

```
>> figure
>> plot(w,abs(H))
>> figure;plot(w,angle(H))
```

Si deve notare la caratteristica passa alto del sistema.

*Stima della risposta impulsiva*

Dalla risposta in frequenza $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{z - 1}{z + a}$ è possibile ricavare l'equazione alle differenze.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{z - 1}{z + a}$$
$$Y(z)\left(1 + az^{-1}\right) = X(z)\left(1 - z^{-1}\right)$$
$$Y(z) + aY(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-1}$$
$$y[n] + ay[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

Per avere univocamente determinata la risposta del sistema ad un ingresso $x[n]$, è necessario definire le condizioni iniziali che in questo caso sono relative allo stato del sistema per $n$=-1. Noi porremo $y[-1] = 0$.
Se vogliamo calcolare la risposta impulsiva possiamo risolvere l'equazione alle differenze a partire da un ingresso impulsivo $x[n] = \delta[n]$, per cui

$$y[0] + ay[-1] = x[0] - x[-1] \Rightarrow y[0] = 1$$
$$y[1] + ay[0] = x[1] - x[0] \Rightarrow y[1] = -x[0] - ay[0] = -1 - a$$
$$y[2] + ay[1] = x[2] - x[1] \Rightarrow y[2] = -x[1] - ay[1] = a + a^2$$
$$y[3] + ay[2] = x[3] - x[2] \Rightarrow y[3] = -x[2] - ay[2] = -a^2 - a^3$$

la ricorsività indotta dalla presenza di almeno un coefficiente $b_r$, con $r \neq 0$, non nullo fa si che questo sistema abbia una risposta impulsiva infinita (*Infinite Impulse Response*, *IIR*).

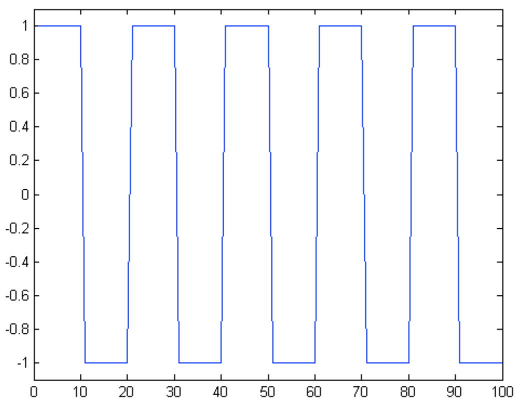
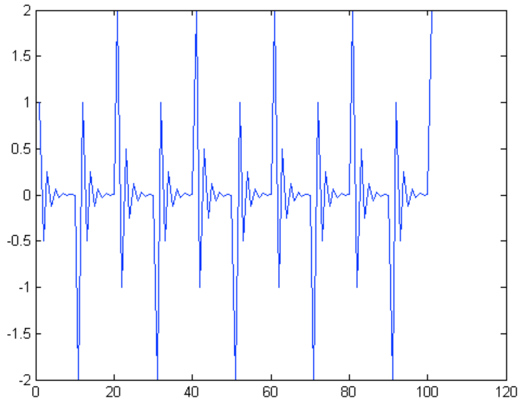
***Nota Matlab 2***

Data la descrizione del sistema in termini dei coefficienti della risposta in frequenza (vedi *Nota Matlab 1*), è possibile, anche per un sistema IIR, stimare alcuni punti della risposta impulsiva $h[n]$ calcolando l'uscita ad un modello dell'ingresso impulsivo unitario dato, ad esempio, da un vettore $x = [1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$ tramite il comando $y = \mathit{filter}(B, A, x)$. Si fa notare che in questo modo è possibile stimare solo alcuni punti della risposta impulsiva, per cui il sistema non sarà completamente caratterizzato dalla $h[n]$ così ottenuta. Ad esempio stimando attraverso la TDF della $h[n]$, la risposta in frequenza del sistema dovremo tenere conto dell'effetto del troncamento (se $x$ è lungo Q punti, la finestra di osservazione è ampia Q punti). In frequenza la riposta del sistema sarà pari a quella reale convoluta con la trasformata della finestra). In ambiente Matlab è disponibile il Control System Toolbox, che permette la descrizione di sistemi LTI e la possibilità di utilizzare funzioni apposite per il calcolo della risposta impulsiva o alla funzione a gradino.

*Esempio*

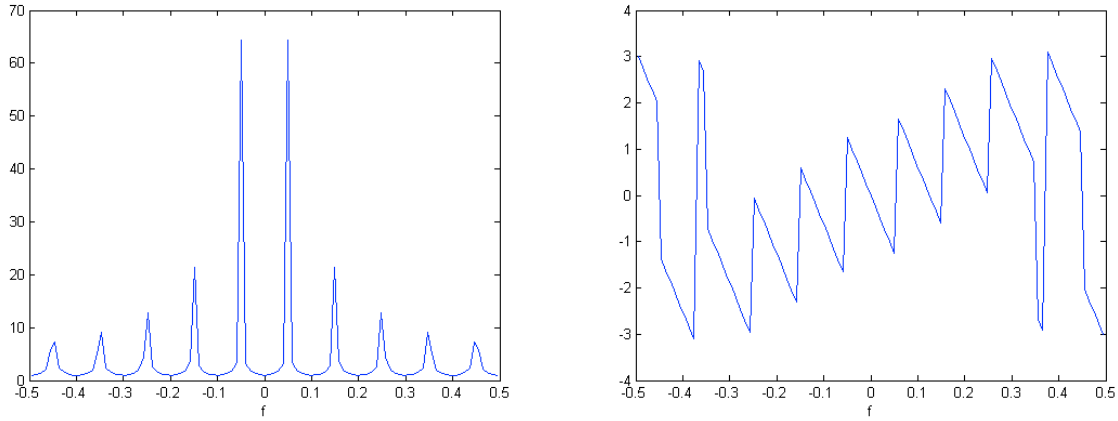
Consideriamo un'onda quadra con frequenza fondamentale $f_0 = 0.05Hz$ con tempo di campionamento T=1 secondo osservata per 100 secondi. Filtriamola poi con il sistema *IIR* precedentemente descritto.

```
>> T=1;
>> t=[0:T:100];
>> f0=0.05;
>> x=square(2*pi*f0*t);
>> y=filter(B,A,x);
>> figure;plot(x);
>> figure;plot(y)
```

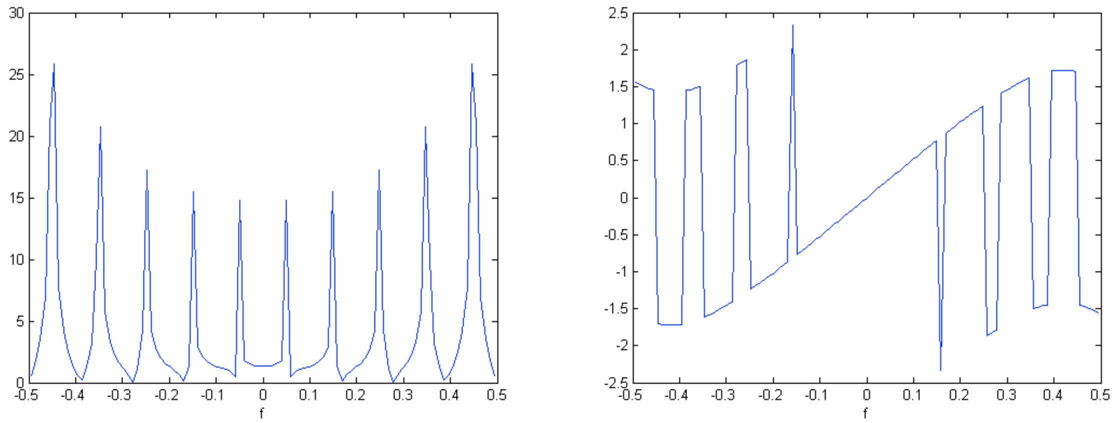
Vediamo come stimare, tramite la TDF, la trasformata di Fourier delle due sequenze, *x* e *y*.

```
>> N=length(x)

N =

   101

>> df=1/(N*T);
>> f=df*[-(N-1)/2:(N-1)/2];
>> X_f=fft(x);
>> figure;plot(f,abs(fftshift(X_f)));xlabel('f')
>> figure;plot(f,angle(fftshift(X_f)));xlabel('f')
```




la stessa analisi può essere effettuata sull'uscita *y[n]*.

Questa può essere ottenuta col comando filter. N.B. il comando filter permette di specificare le condizioni iniziali del sistema (max(lunghezza B, lunghezza A) -1).
L'uscita del comando filter ha le stesse dimensioni dell'ingresso e quindi la taratura dell'asse frequenziale rimane invariata.




è possibile stimare anche la risposta impulsiva $h[n]$ e ottenere l'uscita come convoluzione tra questa e l'ingresso. Ricordiamo che in questo caso la risposta del filtro IIR è troncata e quindi approssimata.

```
>> impulso=[1 0 0 0 0 0 0 0 ];
>> h=filter(B,A,impulso);
>> y_conv=conv(h,x);
```

In questo caso y_conv ha N=P+Q-1 punti, dove P sono il numero di campioni di h (in questo caso 8) e Q i campioni di x (101 campioni). N in questo caso è pari a 108. La taratura dell'asse frequenziale in questo caso deve essere così condotta.

```
>> N=108;
>> df=1/(N*T);
>> f=df*[-N/2:N/2-1]
```

*Esempio di Filtro FIR*

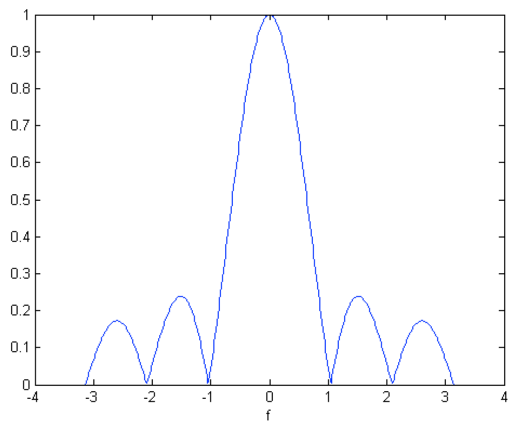
Consideriamo il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento nel dominio *Z*

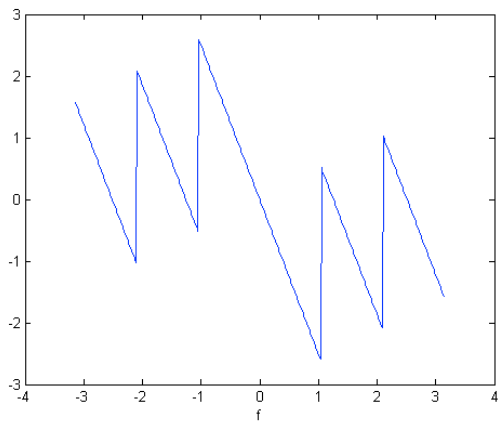
$$H(z) = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} z^{-k}$$

Si tratta di un filtro a risposta impulsiva finita (*Finite Impulse Response*, *FIR*). Si fa notare com i filtri FIR abbiano tutti i poli nell'origine del piano complesso *z*.

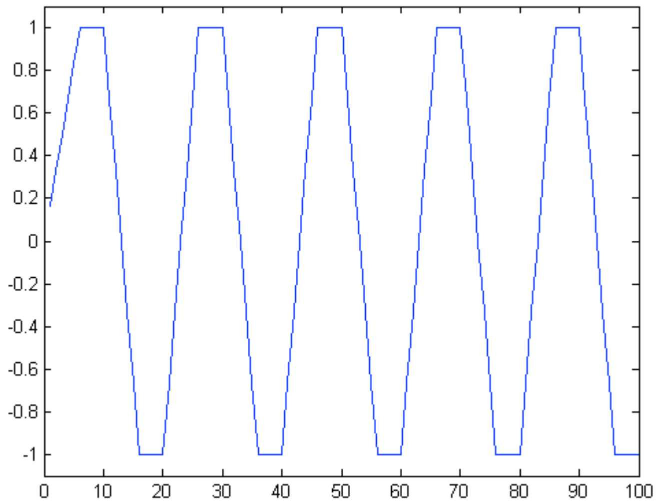
Procedendo in modo analogo a quanto fatto per il filtro IIR:

- stimare l'equazione alle differenze a partire dalla funzione di trasferimento nel dominio *z*.
- calcolare la risposta impulsiva analiticamente
- calcolare la risposta impulsiva tramite matlab
- stimare la rappresentazione tramite i vettori *B*, *A* come da simbolismo utilizzato in Matlab.
- Rappresentare la risposta in frequenza per $M_2$=5
- Utilizzando $M_2$=5 filtrare l'onda quadra prima descritta, visualizzando l'uscita sia nel tempo che nel dominio di Fourier.




L'uscita nel dominio temporale è pari a


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100