Effetto Troncamento sulla Trasformata di Fourier e sulla TDF di una Sequenza

Consideriamo una sequenza infinita $x'[n]$ e osserviamola per un intervallo finito di N campioni (*finestra di osservazione*).
La sequenza finita x[n] con n=0,1,…,N-1 è legata alla sequenza $x'[n]$ dalla seguente relazione

$$x[n] = x'[n] * (u[n] - u[n-N])$$

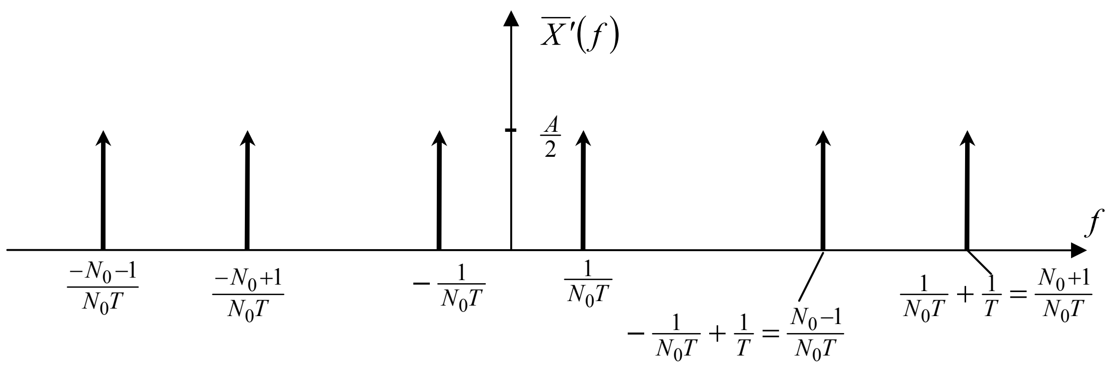
nell'ambito frequenziale le trasformate di Fourier delle due sequenze sono legate dalla seguente relazione

$$\overline{X}(f) = \overline{X}'(f) \otimes \frac{\sin(\pi f T N)}{\sin(\pi f T)} e^{-j\pi f T(N-1)}$$

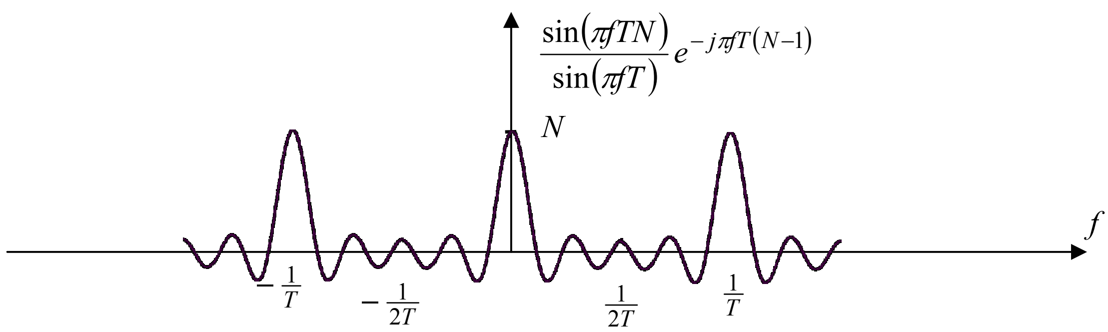
dove il simbolo "$\otimes$" indica la convoluzione.
Il termine a destra indica la trasformata della "finestra" di osservazione, ed ha un andamento simile ad una *sinc(.)*.

Consideriamo ad $x'[n] = A\cos\left(\frac{2\pi n T}{N_0 T}\right)$. Abbiamo visto che è possibile definirne la trasformata di Fourier tramite l'introduzione della funzione di Dirac $\delta(\cdot)$ e questa vale

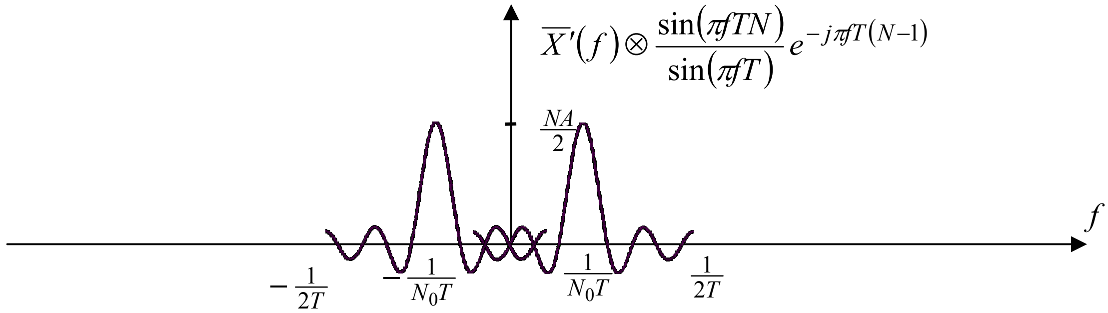
$$\overline{X}'(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(\frac{A}{2}\delta\left(f - \frac{1}{N_0 T} - \frac{n}{T}\right) + \frac{A}{2}\delta\left(f + \frac{1}{N_0 T} - \frac{n}{T}\right)\right)$$



la trasformata dell'impulso rettangolare anch'essa periodica



La convoluzione (ristretta ad un periodo) di queste funzioni converge e può essere rappresentata come.



Ovvero le trasformate delle funzioni a gradino vengono centrate in corrispondenza delle delta di Dirac.

Nota sulla risoluzione frequenziale 1

Si fa notare che l'ampiezza del lobo principale della "sinc" indotta dalla finestra di osservazione, pone dei limiti alla risoluzione in frequenza ovvero alla capacità di distinguere nello spettro due componenti frequenziali vicine.

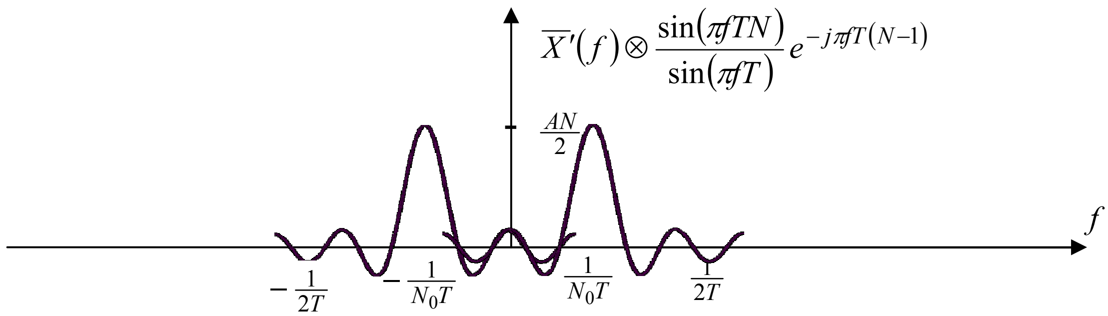
Infatti l'ampiezza del lobo principale della finestra è pari a $\frac{2}{NT}$ ovvero inversamente proporzionale alla larghezza della finestra di osservazione NT.

In generale se vogliamo avere una risoluzione in frequenza pari a *df*, dovremo osservare un segnale per un tempo pari ad almeno NT=1/*df*.

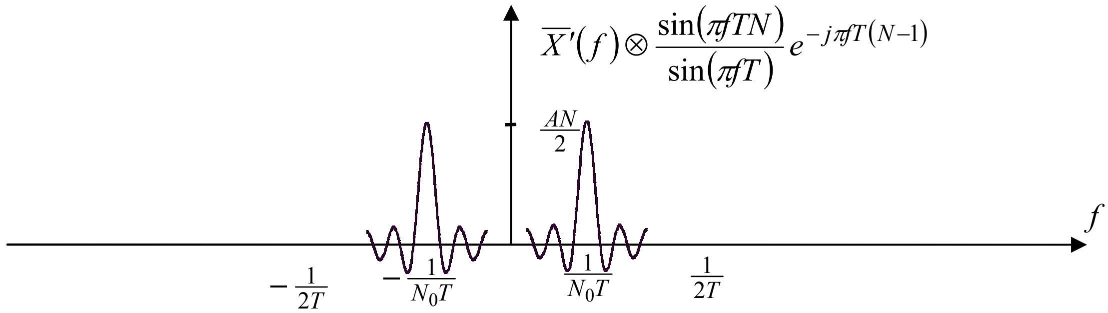
Es.

Vediamo cosa succede al diminuire (caso 1) e al crescere (caso 2)della finestra di osservazione

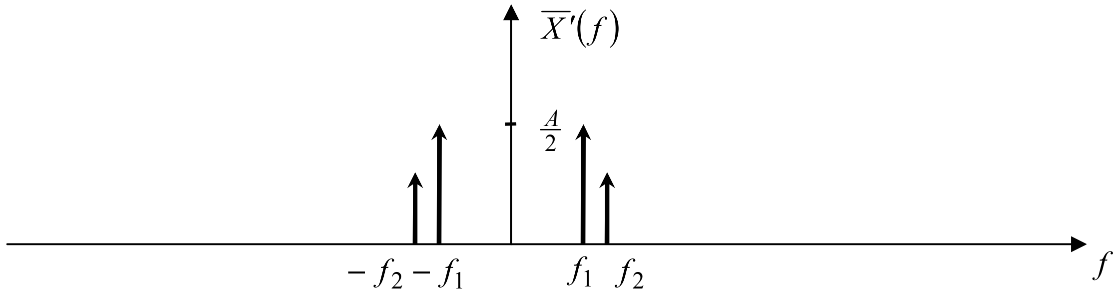
caso 1

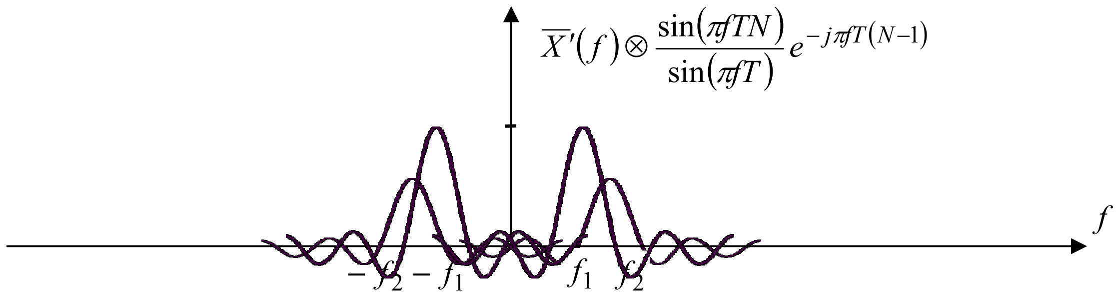


caso 2



Nel seguito viene mostrato un esempio dello spettro di due segnali cosinusoidali e l'effetto della finestra di osservazione, in un caso probabilmente insufficiente per distinguerne i contributi (si deve far notare che nel secondo grafico i contributi delle finestre sono stati sovrapposti e non sommati come sarebbe opportuno).

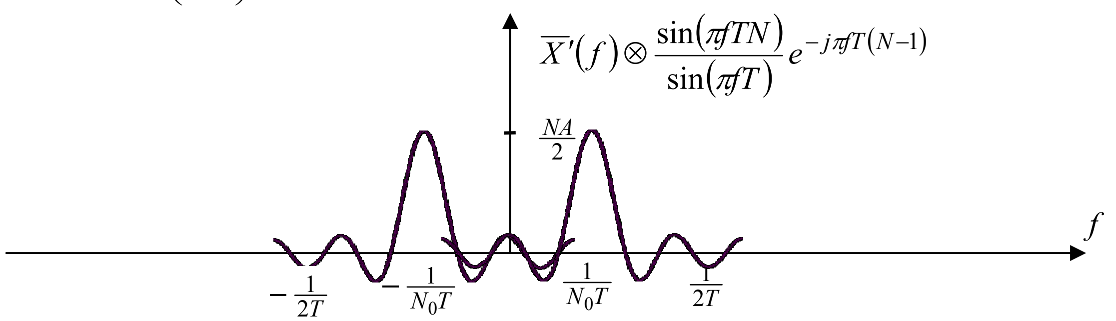




TDF e finestra di osservazione

Consideriamo adesso l'operazione di periodicizzazione indotta dalla Trasformata Discreta di Fourier (TDF) applicata alla sequenza $x'[n]$.
Abbiamo visto che questa operazione in frequenza implica un "campionamento" per cui si ha una relazione tra i campioni della trasformata discreta e i campioni della trasformata di Fourier della sequenza.

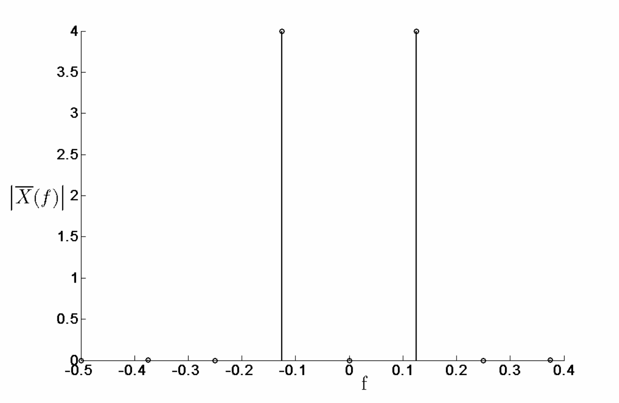
$$\widetilde{X}(k)=\frac{1}{N}\overline{X}\left(\frac{k}{NT}\right)$$

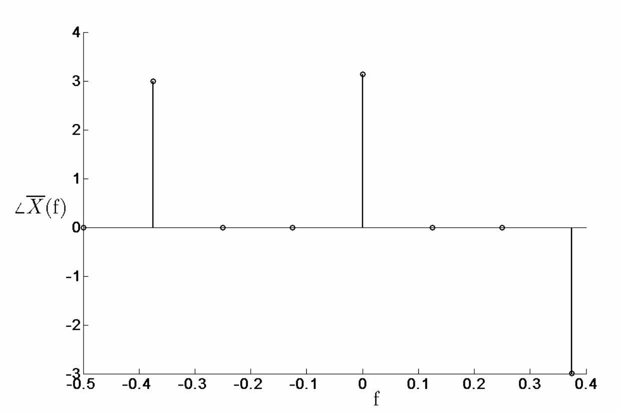


Si fa notare che $x'[n]$ e una sequenza periodica, e l'ampiezza della finestra è pari al periodo del segnale, in corrispondenza di $\frac{k}{NT}=\frac{k}{N_0T}$ si avranno o il valore di picco della finestra o i valori corrispondenti al passaggio per lo zero, evitando effetti distorcenti. Fenomeno analogo si avrà nel caso in cui la grandezza della finestra sarà un multiplo del periodo della funzione.

Sarà comunque possibile anche nel caso di una finestra di ampiezza pari ad un periodo visualizzarne il contributo andando ad effettuare un'operazione di zero padding sulla sequenza troncata.

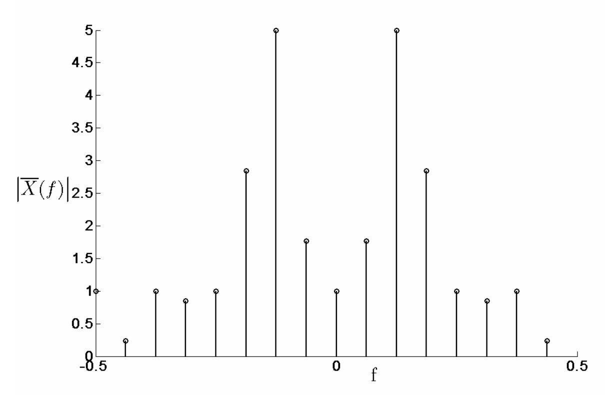
Nel seguito viene mostrata la trasformata di Fourier di una sequenza ottenuta campionando con tempo di campionamento T=1 s, il segnale tempo continuo x1(t)=cos(2*π*t/8) osservato per T_{oss}=8 secondi. Si fa notare che la trasformata è stata stimata tramite la TDF, con l'algoritmo fft, con la formula $\overline{X}\left(\frac{k}{NT}\right) = N\widetilde{X}(k)$.

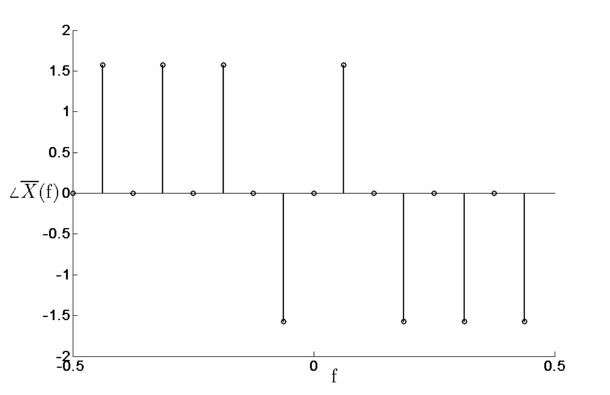




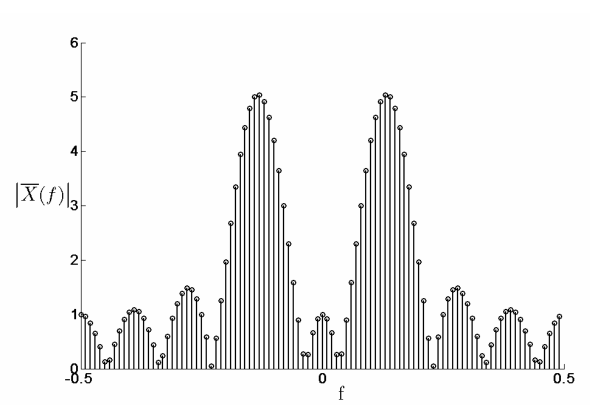
Vediamo l'effetto dello zero padding prima di N=16, poi con N=20 e N=100. Si nota la possibilità di evidenziare l'effetto della finestra di osservazione. Si deve precisare che la finestra di osservazione è sempre pari a 8 secondi.

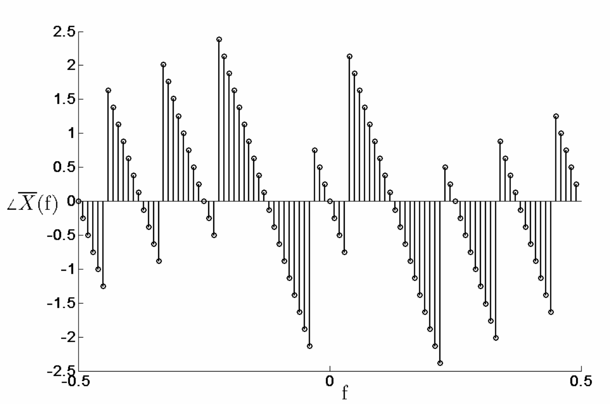
N=16





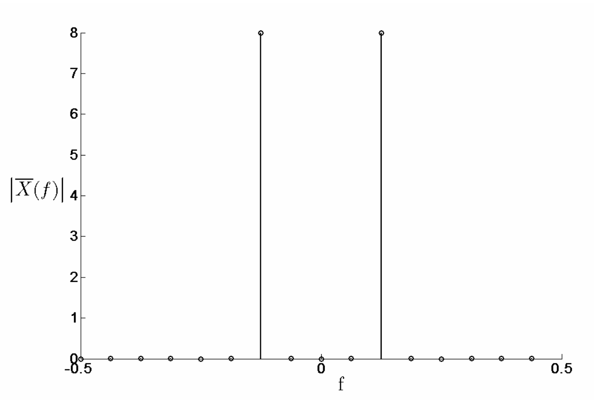
N=100

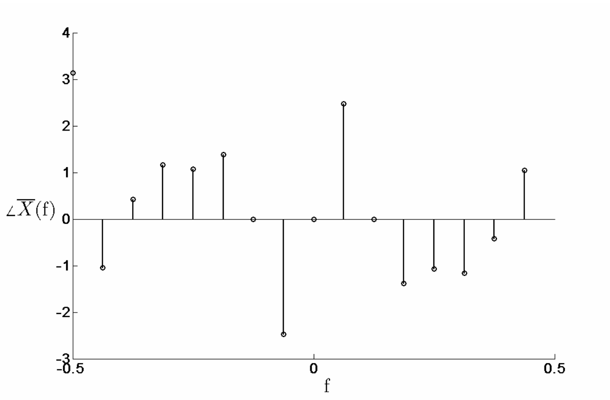




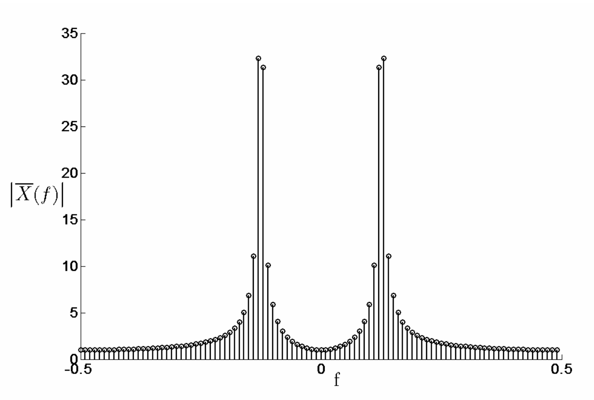
Vediamo invece cosa succede se osserviamo il segnale per N=16 e N=100 campioni. Ovvero aumentiamo la finestra di osservazione. Si deve notare che la risoluzione frequenziale, intesa come distanza tra i punti stimati (e raffigurati) della trasformata, è identica ai casi corrispondenti con lo zero padding. Dai grafici successivi si nota l'effetto indotto dall'utilizzo di diverse finestre temporali.

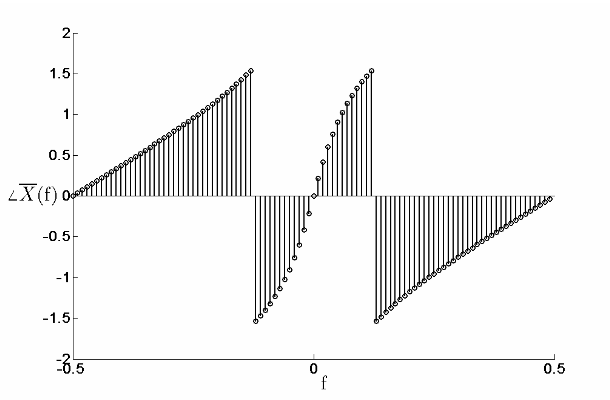
N=16





N=100





Nota sulla risoluzione frequenziale 2

Si deve precisare la differenza che intercorre tra la risoluzione in frequenza $df = \frac{1}{NT}$ nel caso in cui il valore di N sia stato ottenuto aggiungendo degli zeri (*zero padding*) o nel caso in cui il segnale venga osservato per N campioni, ovvero venga aggiunta informazione. Nel primo caso si ha un miglioramento in termini di "visualizzazione" dello spettro, ovvero della risoluzione con la quale si stimano i punti della trasformata di Fourier $\overline{X}(f)$, nel secondo caso pur stimando la $\overline{X}(f)$ sullo stesso numero di punti, abbiamo un differenza sostanziale di informazione acquisita e la possibilità di discriminare componenti frequenziali vicine.