Filtri FIR con metodo delle finestre

Filtro Passa Basso

Si consideri la risposta in frequenza di un filtro FIR ideale di tipo passa basso del tipo

$$\overline{H}_d(f) = \begin{cases} 1 & 0 \le |f| \le f_L \\ 0 & 0 < |f| \le f_s \end{cases}$$

con $f_s = \frac{1}{T}$ frequenza di campionamento e $\overline{H}_d(f)$ periodica di periodo $\frac{1}{T}$. La risposta impulsiva di tale filtro può essere determinata utilizzando la trasformata inversa di Fourier (vedere appunti disponibili on-line qui http://www2.ing.unipi.it/~d11285/Lezioni_07_08/Appunti_TF_Sequenza.pdf)

$$h_d[n] = \frac{1}{f_s}\int_{-f_s/2}^{+f_s/2} \overline{H}_d(f) e^{j2\pi f nT} d\omega = \frac{1}{f_s}\int_{-f_L}^{+f_L} e^{j2\pi f nT} df = \frac{1}{f_s}\frac{1}{j2\pi n}\left(e^{j2\pi f nT}\right)\Big|_{-f_L}^{f_L} =$$

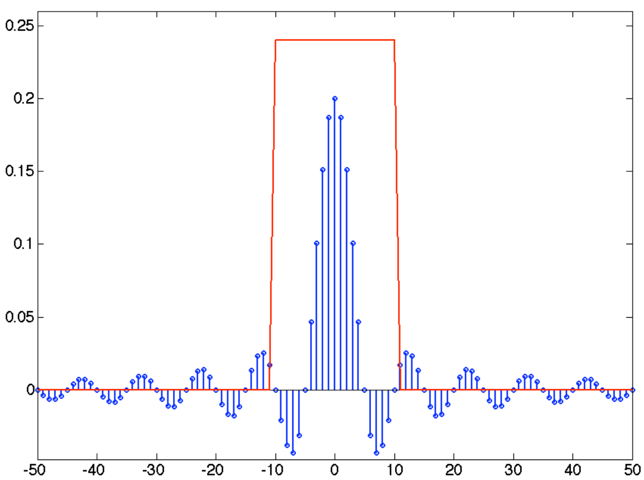
$$= \frac{1}{f_s}\frac{1}{j2\pi nT}\left(e^{j2\pi f_L nT} - e^{-j2\pi f_L nT}\right) = \frac{2j\sin(2\pi f_L nT)}{j2\pi n} = \frac{\sin(2\pi f_L n)}{\pi n}$$

La risposta impulsiva di tale sistema è infinita. Si possono utilizzare un mumero finito di campioni andando a moltiplicare tale risposta per una finestra (rettangolare, di Hamming, Hanning etc.).

Supponiamo dapprima di utilizzare una finestra w[n] di N=2M+1 campioni centrata attorno allo zero. La risposta reale sarà $h[n] = h_d[n]w[n]$ mentre la risposta in frequenza del filtro sarà modificata come segue

$$\overline{H}(f) = \overline{H}_d(f) \otimes \overline{W}(f)$$

Nella figura seguente sono mostrate la risposta impulsiva ideale e la finestra (in questo caso rettangolare).



Nota Matlab 1

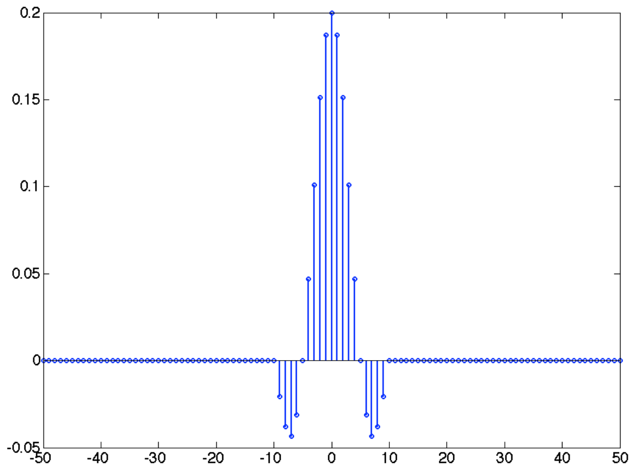
In questo caso si è utilizzato un tempo di campionamento T= 1 s.

L'asse dei tempi va da -50 s a 50 s. La frequenza di taglio è pari a $f_L = 0.1$ Hz

Il punto di singolarità relativo a n=0, fornisce un valore *NaN* (not a number). La sua posizione nel vettore è stata individuata utilizzando le funzioni *find(.)* ed *isnan(.)* ed è stato sostituito il valore opportuno del limite.

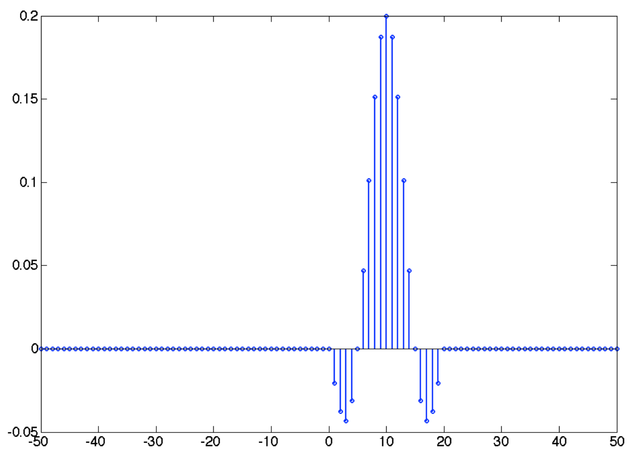
nella successiva il risultato dell'applicazione della finestra che se è rettangolare fornisce il seguente risultato.

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi f_L n)}{\pi n} & \text{per } -M \le n \le M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

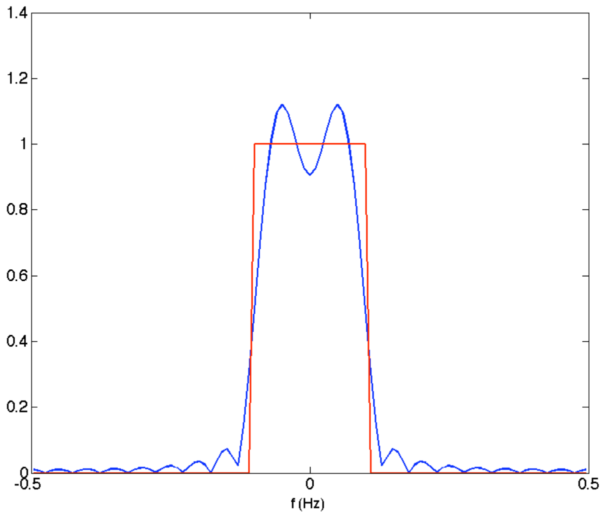


Come si vede il sistema è non causale, visto che la risposta impulsiva è diversa da zero per n<0. Possiamo in questo caso ottenere un sistema causale traslando la risposta impulsiva di M campioni.

In questo modo avremo $h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi f_L (n-M))}{\pi (n-M)} & \text{per } 0 \le n \le 2M+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



Nel seguito sono mostrate le trasformate di Fourier del filtro ideale (in rosso) e di quello reale.



Si notano le oscillazioni della risposta, e la minore selettività del filtro che si evidenzia in un passaggio più lento da banda passante, minore in valore assoluto a f_L, a banda attenuata. La risposta ideale, in rosso, è stata ottenuta manualmente imponendo un valore pari a 1, per le frequenze comprese tra $-f_L$ e

Nota Matlab 2

Nel caso del filtro reale la risposta è stata stimata utilizzando la TDF con l'algoritmo fft, su N=101 campioni. Anche se la rappresentazione è a tratto continuo, per l'utilizzo del comando *plot(.)* la risoluzione frequenziale è pari a df=1/(NT).

La risposta ideale, in rosso, è stata ottenuta manualmente imponendo un valore pari a 1, per le frequenze comprese tra $-f_L$ e f_L.

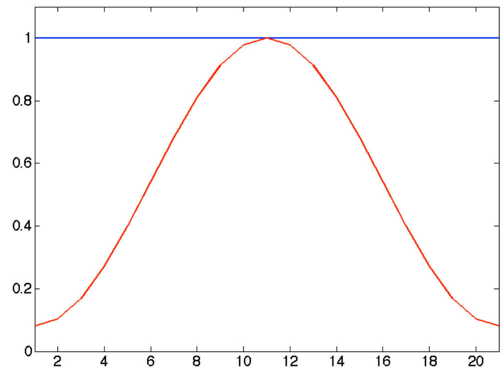
Nota Matlab 3

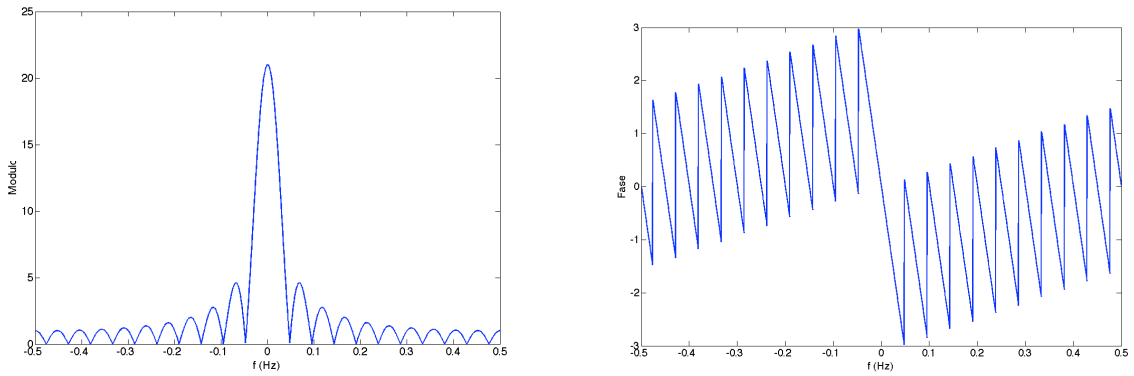
Si fa notare che è possibile utilizzare come risposta impulsiva un vettore costituito dagli elementi corrispondenti alla finestra. Nel caso precedente quindi i primi 2M+1 elementi.

In particolare si fa notare che la TDF del segmento di segnale mostrato nelle figure precendenti che comprende 101 campioni, equivale ad avere operato uno zero padding degli 2M+1 elementi della risposta impulsiva.

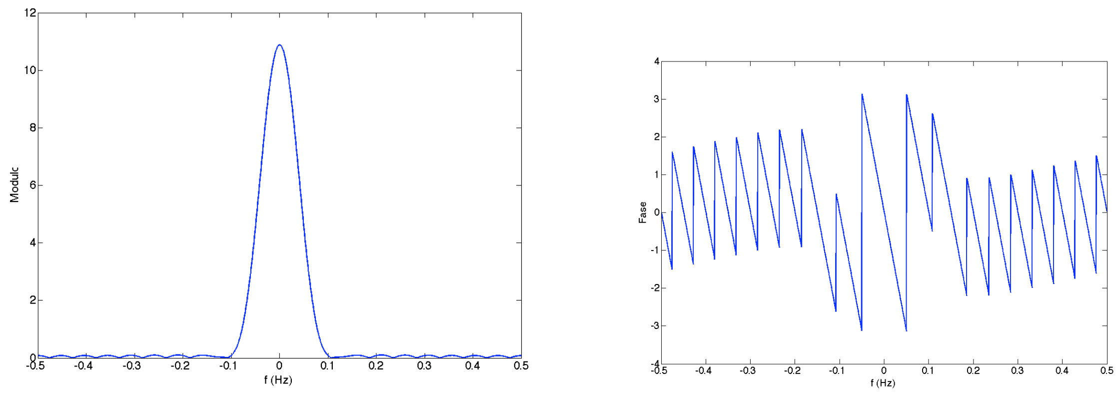
Utilizzo di finestre differenti da quella rettangolare.

Per diminnure l'effetto delle oscillazioni è possibile utilizzare finestre come quella di Bartlett, Hamming, Hanning o Blackmann. Nel seguito sono mostrate la finestra rettangolare con relativa trasformata e la finestra di Hamming, in rosso, con relativa trasformata.





Modulo e fase della trasformata della finestra rettangolare



Modulo e fase della trasformata della finestra di Hanning

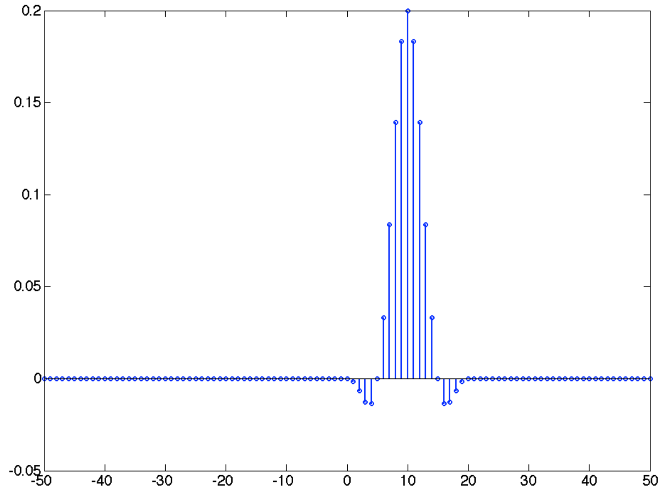
Nota Matlab 4

Le finestre precedenti sono lunghe N=20 campioni. La loro trasformata è stata rappresentata su 2048 campioni utilizzando l'operazione di zero padding.

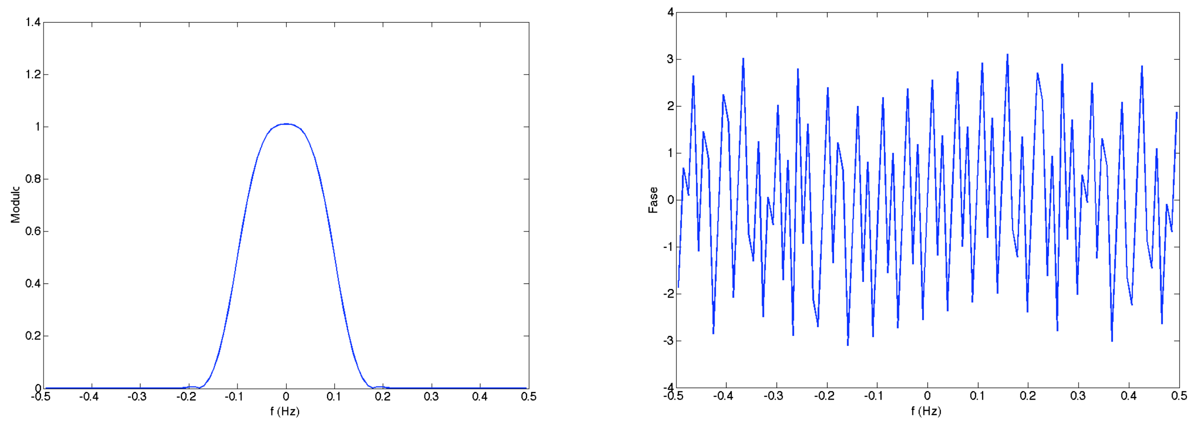
Le finestre sopra citate possono essere realizzate con le omonime funzioni Matlab,

hanning(.) hamming(.) bartlett(.) blackman(.) e in più generale tramite la funzione *window(.)*

Nel seguito viene mostrato l'effetto della finestra di hanning sul filtro precedentemente analizzato.



Risposta impulsiva nel tempo ottenuta tramite la risposta di Hanning.



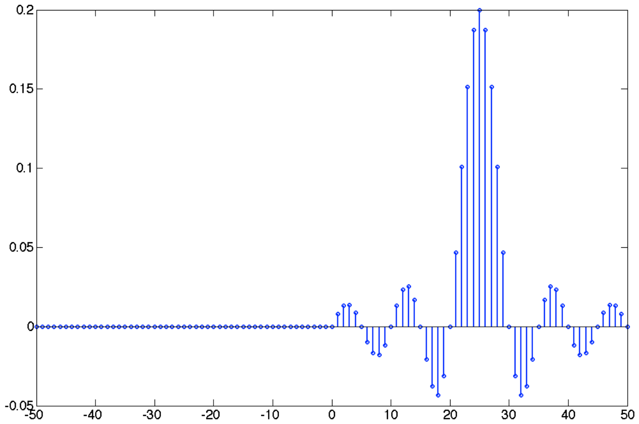
Modulo e fase della trasformata del filtro ottenuto tramite la finestra di Hanning.

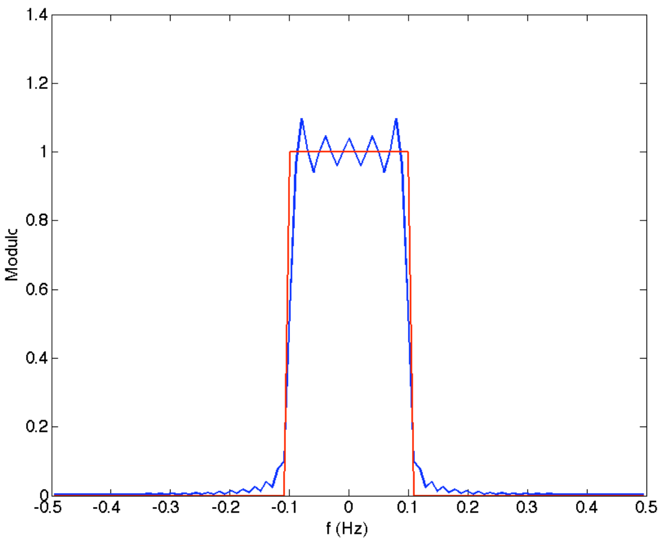
Selettività del Filtro

La banda di transizione, ovvero il passaggio dalla banda passante alla attenuata è peggiorata dall'utilizzo delle finestre. In particolare la finestra rettangolare, sebbene causi delle oscillazioni più ampie nel modulo della risposta in frequenza del filtro rispetto alle altre finestre, è quella che avendo un lobo principale meno largo, produce una banda di transizione più stretta.

A parità di finestra un modo per migliorare la selettività del filtro, è quello di aumentare l'ordine, ovvero utilizzare una finestra più ampia. Ciò provoca una riduzione della larghezza del lobo principarale e quindi una riduzione della banda di transizione.

Nel seguito viene mostrato il filtro ottenuto con una finestra rettangolare di 50 campioni e il modulo della risposta in frequenza, confrontato con la risposta ideale.

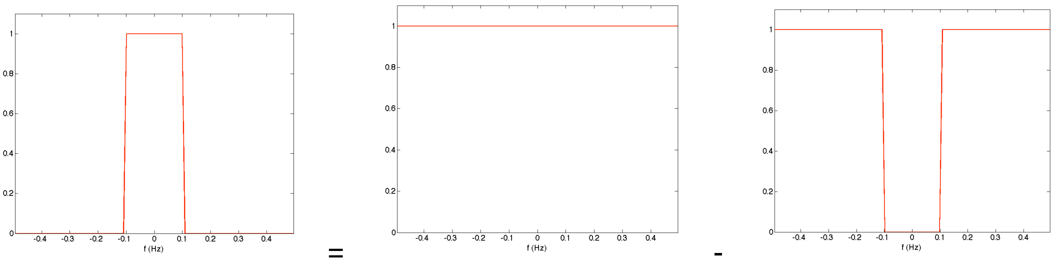




Filtro FIR Passa alto a partire dal passa basso

Un filtro passa alto ideale può essere ottenuto dal filtro passa basso nel modo seguente

$\overline{H}_{hp}(f) = 1 - \overline{H}_{lp}(f)$ Per via grafica questa operazione può essere schematizzata come:



applicando la trasformata inversa di Fourier si ottiene $h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$. L'impulso unitario centrato nello zero è la antitrasformata del "filtro passa tutto".

In questo modo è facilmente ottenibile un filtro passa alto di tipo FIR utilizzando i risultati precedenti. Nel caso di finestra rettangolare, considerando il sistema causale avremo

$$h[n] = \begin{cases} \delta[n-M] - \dfrac{\sin\left(2\pi f_L (n-M)\right)}{\pi (n-M)} & \text{per } 0 \le n \le 2M+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

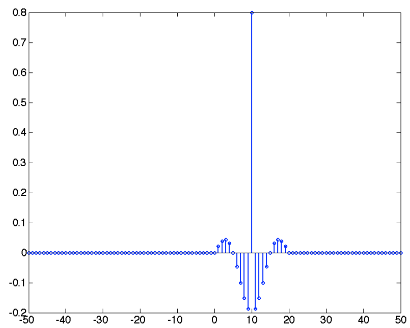
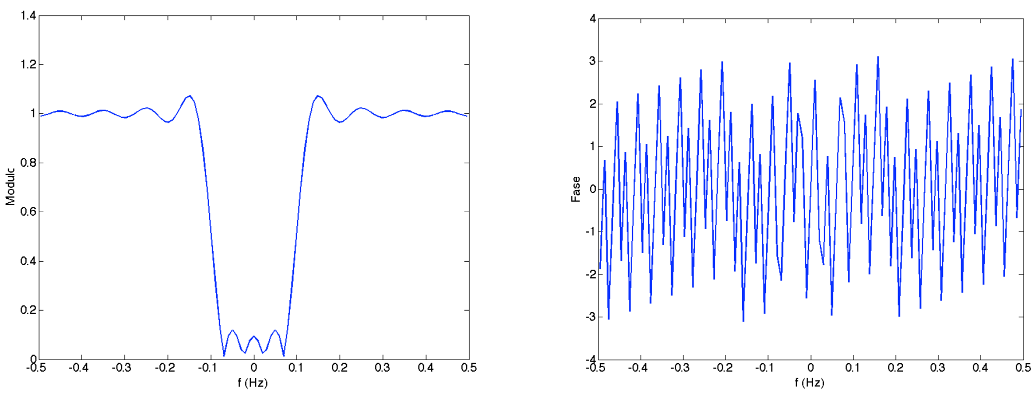


Grafico nel tempo della risposta impulsiva.



Modulo e fase della trasformata del filtro passa alto. Le oscillazioni presenti sono dovute all'utilizzo della finestra rettangolare.

Nota Matlab 5

I filtri presentati in questa dispensa appartengono alla categoria dei filtri FIR. In ambiente Matlab è possibile applicare tali filti ad un vettore *x*, utilizzando la convoluzione oppure il comando *filter(.)* nel modo seguente

y=filter(h,1,x)

In particolare è possibile ripetere l'esempio della dispensa disponibile on-line al seguente indirizzo http://www2.ing.unipi.it/~d11285/Dispense/2007_2008/LTI_Matlab.pdf sostituendo il filtro.