Analisi dei Segnali Biomedici

Appunti dalle lezioni

Nicola Vanello

11 aprile 2012

Capitolo 1

Energia e Potenza

1.1 Definizioni

Dato il segnale tempo continuo *s(t)*, reale o complesso, si definisce *energia del segnale nell'intervallo* $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ l'integrale

$$E_S(T) \triangleq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \tag{1.1}$$

Si deve notare che se *s(t)* è reale, l'energia assume un significato fisico. La 1.1 ad esempio potrebbe indicare l'energia dissipata su un resistore R pari ad 1 Ω ove *s(t)* fosse la corrente applicata.

Il segnale tempo continuo *s(t)* di dice ad *energia finita*, se esiste, finito e diverso da zero il limite

$$E_S = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \tag{1.2}$$

Si deve notare che l'integrale è convergente per tutti i segnali con un significato fisico. Noi useremo segnali ad energia infinita, che appunto nella realtà non esistono, come *modelli di segnale*. Questi modelli ci serviranno per approssimare i segnali fisici durante un intervallo di osservazione.

Si definisce *potenza media del segnale s(t) nell'intervallo* $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ l'integrale

$$P_S(T) \triangleq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \tag{1.3}$$

Si dice che un segnale *s(t)* è a *potenza media finita*, se esiste, finito e diverso da zero il limite

$$P_S = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \tag{1.4}$$

I segnali periodici, per i quali esiste finito e diverso da zero un valore T_0 tale che $s(t+T_0) = s(t)\ \forall t$, sono ad energia infinita e a potenza media finita.

Infatti se consideriamo $T = NT_0$, il limite $T \to \infty$ è equivalente al limite $N \to \infty$ per cui l'energia del segnale può scriversi come

$$E_S = \lim_{N\to+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt \tag{1.5}$$

che tende all'infinito nel limite $N \to \infty$

La potenza media dei segnali periodici quindi si può scrivere come

$$P_S = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{NT_0} \int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |s(t)|^2 dt =$$

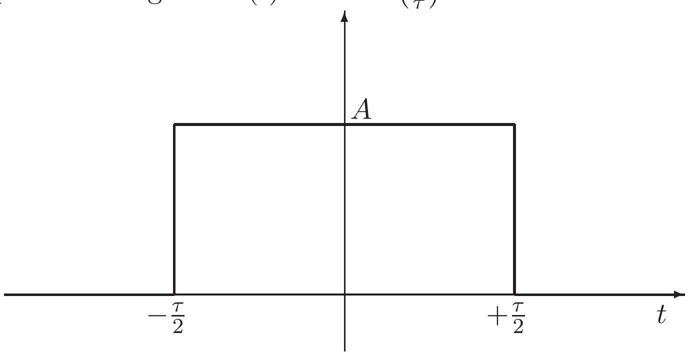
$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{NT_0} N \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt \tag{1.6}$$

Si fa notare che un segnale a potenza media finita possiede energia infinita, mentre un segnale a energia finita ha potenza media nulla.

1.2 Esempi

1.2.1 Impulso Rettangolare

Impulso rettangolare $s(t) = Arect\left(\frac{t}{\tau}\right)$.



ha energia data da

$$E_S = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |rect\left(\frac{t}{\tau}\right)|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |Arect\left(\frac{t}{\tau}\right)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A^2 dt = A^2\tau$$

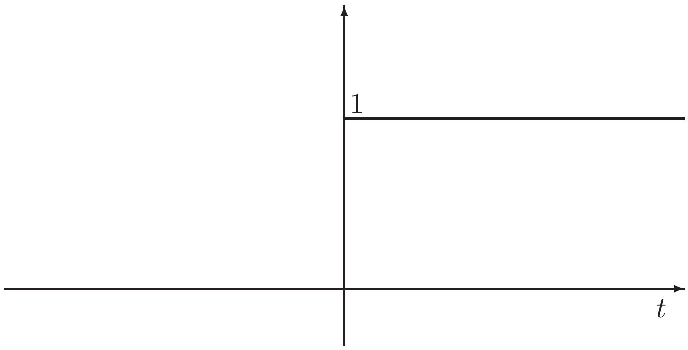
mentre la potenza è data da

$$P_S = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E_S(T) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} A^2\tau = 0$$

1.2.2 Gradino Unitario

Il segnale gradino unitario è così definito

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per t} < 0 \\ 1 & \text{per t} \geq 0 \end{cases}$$



ha energia data da

$$E_S = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |u(t)|^2 dt =$$

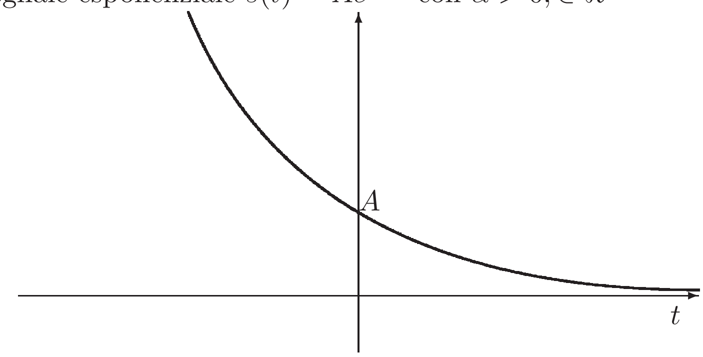
$$= \lim_{T \to +\infty} \int_{0}^{\frac{T}{2}} 1 dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{T}{2} = +\infty$$

mentre la potenza è data da

$$P_S = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} E_S(T) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

1.2.3 Esponenziale

Segnale esponenziale $s(t) = Ae^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0, \in \Re$



ha energia data da

$$E_S = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |Ae^{-\alpha t}|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \lim_{T\to+\infty} \left(A^2 \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \right) |_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} A^2 \frac{1}{-2\alpha} \left(e^{-2\alpha \frac{T}{2}} - e^{+2\alpha \frac{T}{2}} \right) = \lim_{T\to+\infty} A^2 \frac{1}{2\alpha} \left(e^{+\alpha T} - e^{-\alpha T} \right) =$$

visto che $\alpha > 0$ il primo membro a sinistra tende a $+\infty$, mentre il membro a destra tende a zero

$$= \frac{A^2}{2\alpha} (+\infty - 0) = +\infty$$

mentre la potenza è data da

$$P_S = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E_S(T) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} A^2 \frac{1}{2\alpha} \left(e^{+\alpha T} - e^{-\alpha T} \right) =$$

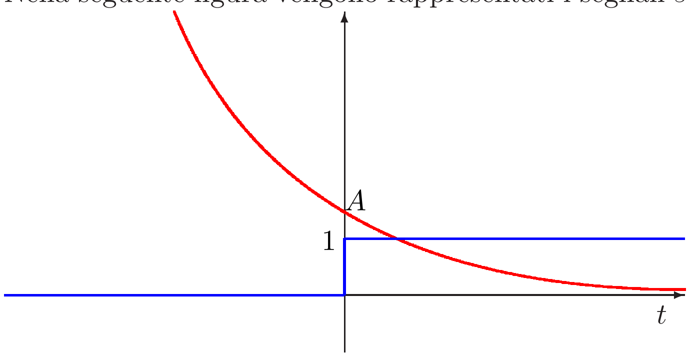
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{A^2}{2\alpha} \left(\frac{e^{+\alpha T}}{T} - \frac{e^{-\alpha T}}{T} \right) =$$

$$= \frac{A^2}{2\alpha} (+\infty - 0) = +\infty$$

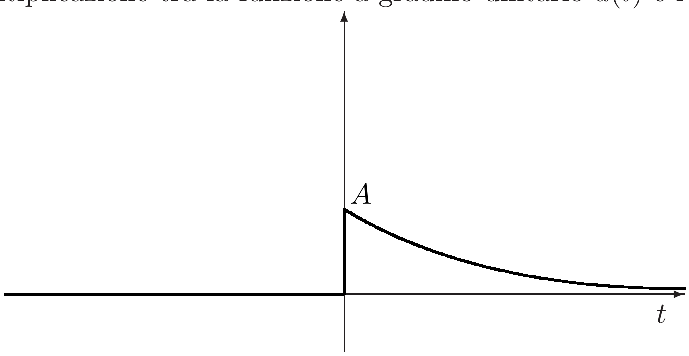
1.2.4 Esponenziale Unilatero

Segnale esponenziale $s(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$ con $\alpha > 0, \in \Re$

Nella seguente figura vengono rappresentati i segnali $s(t) = Ae^{-\alpha t}$ e $u(t)$



Nella seguente figura viene rappresentato il risultato dell'operazione di moltiplicazione tra la funzione a gradino unitario $u(t)$ e l'esponenziale.



L'energia dell'esponenziale unilatero si trova come

$$
\begin{aligned}
E_S &= \lim_{T\to+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |Ae^{-\alpha t}u(t)|^2 dt = \\
&= \lim_{T\to+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 e^{-2\alpha t}u(t) dt = \lim_{T\to+\infty}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \\
&= \lim_{T\to+\infty}\left(A^2\frac{1}{-2\alpha}e^{-2\alpha t}\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to+\infty} A^2\frac{1}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha\frac{T}{2}} - e^0\right) = \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{A^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) = \frac{A^2}{2\alpha}
\end{aligned}
$$

dato che $\alpha > 0$ il termine $e^{-\alpha T}$ per $T \to +\infty$ tende a zero.

Visto che l'esponenziale unilatero ha energia finita, possiamo dedurre che la potenza media sarà nulla. Infatti

$$
\begin{aligned}
P_S &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}E_S(T) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\frac{A^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) = \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{A^2}{2\alpha}\left(\frac{1}{T} - \frac{e^{-\alpha T}}{T}\right) = 0
\end{aligned}
$$

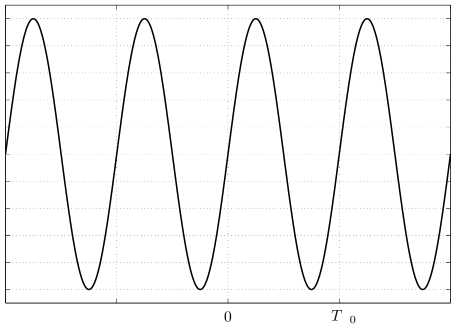


Figura 1.1: Segnale Sinusoidale

1.2.5 Segnale sinusoidale

Si consideri il segnale $s(t) = A\sin(2\pi\frac{t}{T_0})$. Il segnale è periodico di periodo T_0. La frequenza del segnale è quindi pari a $f_0 = \frac{1}{T_0}$ mentre la pulsazione è pari a $\omega_0 = 2\pi f_0$. Nella figura 1.2.5 è mostrato l'andamento temporale.

Essendo periodico l'energia del segnale risulta essere infinita, mentre la potenza può essere calcolata come

$$P_S = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |A\sin(2\pi\frac{t}{T_0})|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2\sin^2(2\pi\frac{t}{T_0})dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2\left(\frac{1-\cos(4\pi\frac{t}{T_0})}{2}\right)dt =$$

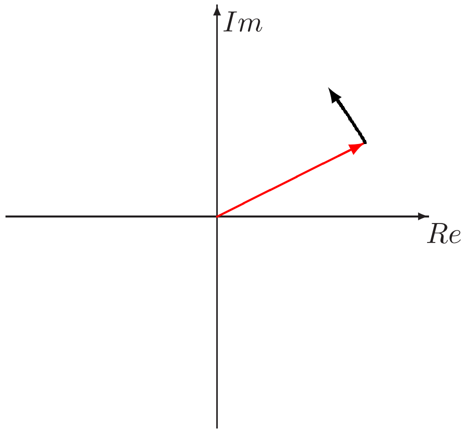
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left(\frac{A^2}{2}\right)dt + \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left(\frac{A^2\cos(4\pi\frac{t}{T_0})}{2}\right)dt$$

L'ultimo membro di questa equazione rappresenta l'integrale di un coseno su un multiplo intero del periodo, che in questo caso è $\frac{T_0}{2}$, quindi è nullo. La potenza quindi è legata al termine costante nell'ultimo membro ed è quindi

$$P_S = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left(\frac{A^2}{2}\right)dt = \frac{A^2}{2}$$

1.2.6 Segnale Esponenziale Complesso

Si consideri il segnale $s(t) = Ae^{j2\pi\frac{t}{T_0}}$. Il segnale è periodico di periodo T_0. Sul piano complesso è possibile rappresentare questo segnale come un fasore, con modulo pari ad A, e rotante in senso antiorario.



Anche in questo caso come nel caso di 1.2.5 il segnale è a potenza media finita e ad energia infinita. La potenza è facilmente calcolabile come:

$$P_S = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |A|^2 dt = A^2$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando il risultato ottenuto per il segnale sinusoidale, valido anche per un segnale di tipo cosinusoidale. In particolare è possibile esprimere l'esponenziale complesso tramite la formula di Eulero per la quale

$$e^{j2\pi\frac{t}{T_0}} = \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right) + j\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right) \tag{1.7}$$

Sostituendo tale equazione nella 1.6 e considerando che i segnali $\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)$ e $\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)$ sono ortogonali, si ottiene facilmente il risultato cercato.