ANALISI DI FOURIER

Segnali a tempo continuo:

Segnali aperiodici – Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier
- Derivazione intuitiva della TCF a partire dallo Sviluppo in Serie di Fourier
- Spettro di ampiezza e fase
- Proprietà TCF

Segnali periodici – Estensione della TCF a segnali periodici

Campionamento dei segnali
- Analisi nel dominio del tempo e della frequenza

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Un segnale aperiodico si può rappresentare come la sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza infinitesima e di frequenza variabile con continuità tra -∞ e +∞

Antitrasformata o Trasformata Inversa

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

dove, la trasformata Continua di Fourier

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

È possibile arrivare a dimostrarlo in modo intuitivo andando a vedere come cambia lo spettro di n segnale periodico, quando il periodo viene fatto tendere all'infinito, ovvero viene reso aperiodico.

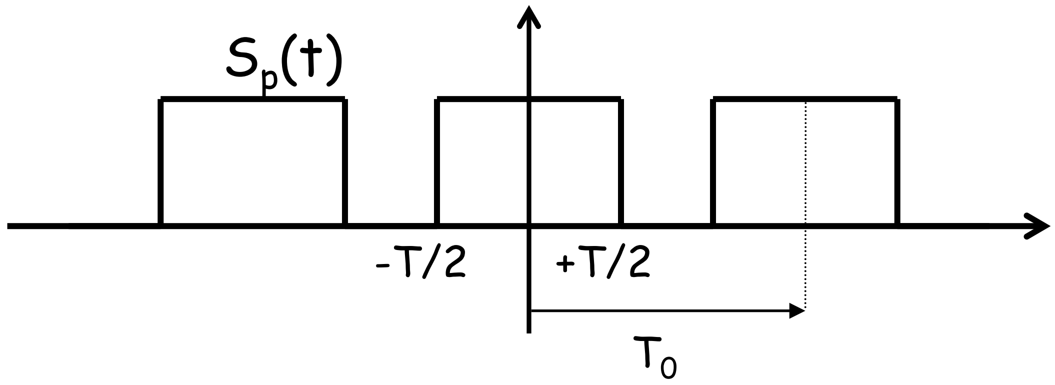
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df \qquad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{\mathrm{j}2\pi \mathrm{nt/T_0}}$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) e^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{nt/T_0}} dt$$

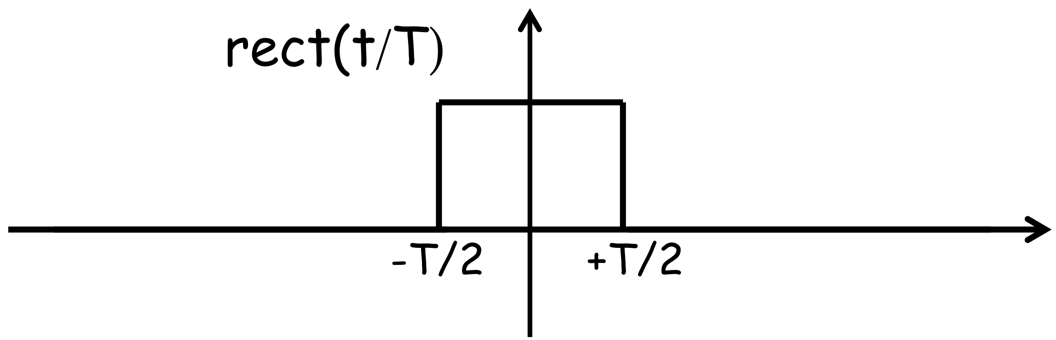
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Consideriamo un treno di impulsi $s_p(t)$



Dove $s_p(t)$ può essere scritto come

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$



L 'impulso centrato in zero può essere pensato come il limite per T_0 che tende a $+\infty$ di $s_p(t)$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

- n = 0

$$S_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{+T/2} A\,dt = \frac{AT}{T_0}$$ È il valore medio del segnale.

- n ≠ 0

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{+T/2} Ae^{-j2\pi nt/T_0}dt = \frac{1}{T_0}A\left[\frac{e^{-j2\pi nt/T_0}}{-j2\pi n/T_0}\right]_{-T/2}^{+T/2} = \frac{A}{T_0}\frac{e^{-j\pi n\frac{T}{T_0}} - e^{+j\pi n\frac{T}{T_0}}}{-j2\pi n/T_0} =$$

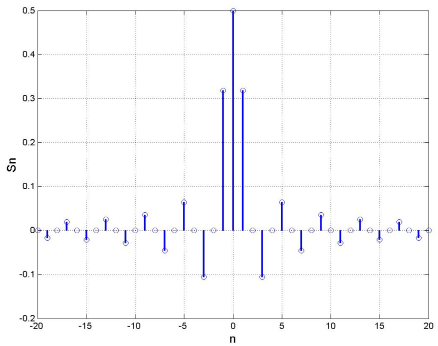
$$= \frac{A}{T_0}\frac{-2j\sin\left(\pi n\frac{T}{T_0}\right)}{-j2\pi n/T_0} = \frac{AT}{T_0}\frac{\sin\left(\pi n\frac{T}{T_0}\right)}{\pi n\frac{T}{T_0}} = \frac{AT}{T_0}\mathrm{sinc}\left(n\frac{T}{T_0}\right)$$

N.B. in realtà la sinc(n) è definita anche per n=0

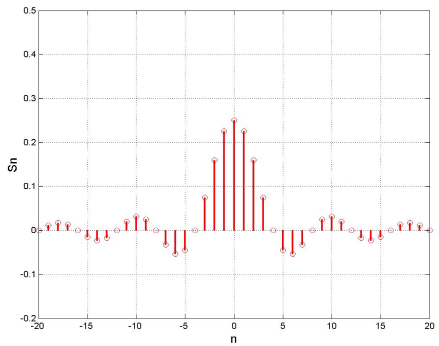
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Visualizziamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s_p(t)$ al variare di T_0 a parità di T.

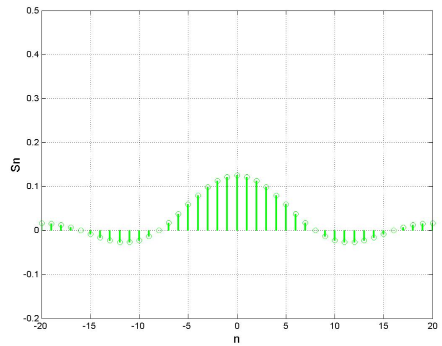
$T_0 = 2T$



$T_0 = 4T$



$T_0 = 8T$



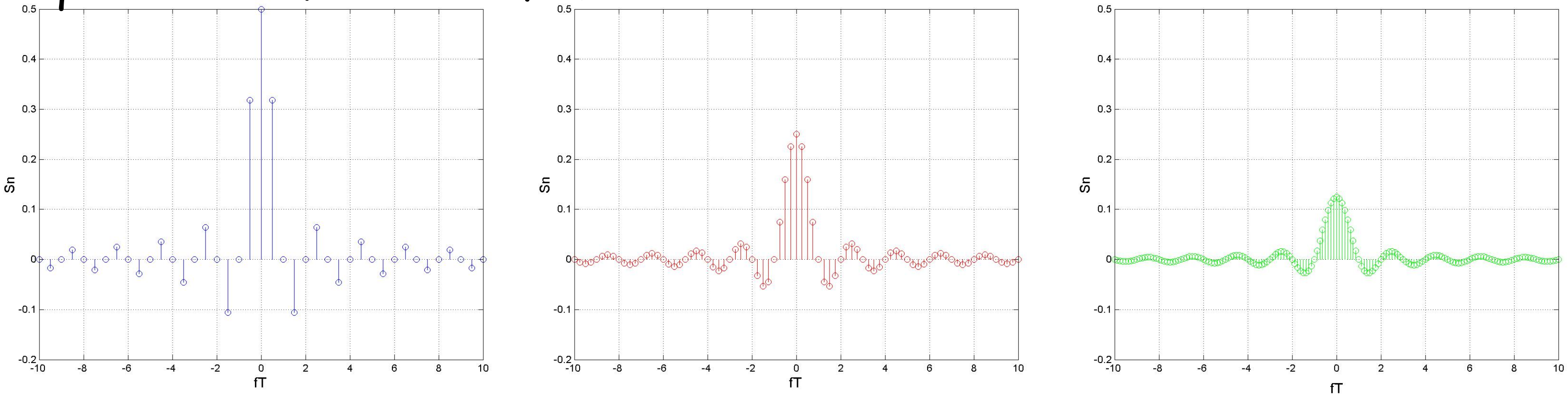
Si nota come l'ampiezza dei coefficienti diminuisce all'aumentare del periodo, come si evince dalla formula dei coefficienti

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s_p(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

I coefficienti sono stati visualizzati rispetto a n: ad ogni n corrisponde la frequenza $f_n=n/T_0$ e quindi, visto che T_0 differisce in ciascun grafico, le frequenze per ogni n sono differenti $T_0=kT$ con k=2,4,8.

È possibile visualizzare lo spettro in funzione di $f=n/T_0=n/(kT)$. Inoltre, se vogliamo svincolarci dalla particolare scelta di T, possiamo usare la frequenza normalizzata fT.



Dal confronto degli spettri si vede come all'aumentare di T_0 le righe si infittiscano: la differenza tra due valori successivi nei quali sono definiti gli S_n è $\Delta f=(n+1)f_0-nf_0=f_0$

Nel limite $T_0 \to \infty$ questa differenza diventa infinitesima, df, ed è possibile definire una variabile continua $f=nf_0$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Il segnale $s_p(t)$ può essere scritto come $$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

È possibile dimostrare gli S_n si possono scrivere come $S_n=f_0S(nf_0)$, dove S(f) è stata definita precedentemente, e che, al limite di $T_0 \to \infty$ gli S_n si possono scrivere come $S_n=S(f)df$

A questo punto la sommatoria dello sviluppo in serie di Fourier può essere interpretata come la somma di infinite funzioni oscillanti complesse date da

$$S(f)\,df\; e^{j2\pi ft}$$

Queste sono dei fasori di ampiezza infinitesima |S(f)|df e fase pari a $2\pi ft + \theta(f)$ con $\theta(f)$ fase di S(f)

Il processo al limite comporta la trasformazione della sommatoria nell'integrale, ottenendo la formula

$$\boldsymbol{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df}$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Con S(f) si indica la Trasformata Continua di Fourier (TCF) che identifica univocamente il segnale aperiodico s(t)

Se si scrive $S(f) = |S(f)| e^{j\theta(f)}$

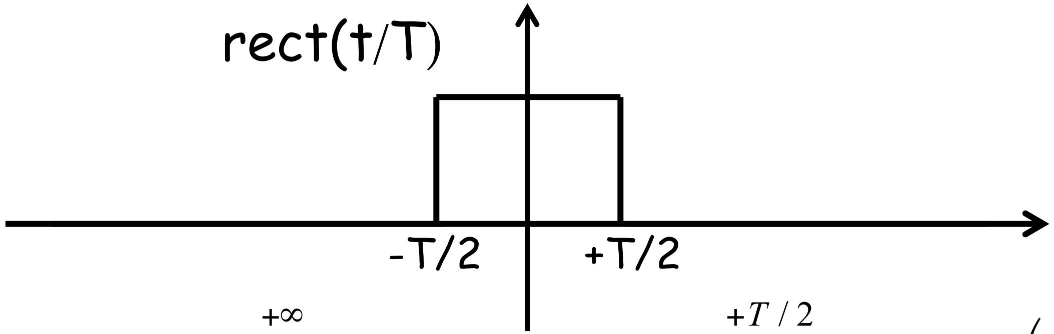
Possiamo definire lo spettro di ampiezza $S(f)$ e lo spettro di fase $\theta(f)$

È possibile usare anche la rappresentazione parte reale–parte immaginaria

$$S(f) = R(f) + jI(f)$$

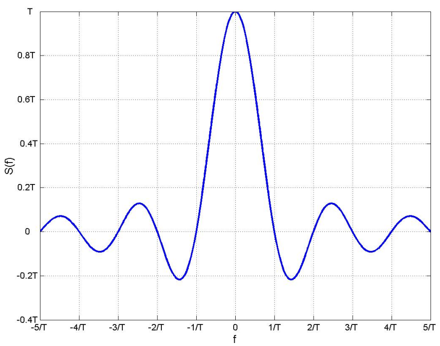
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Come esempio calcoliamo la TCF dell' impulso rettangolare



$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t/T) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi f t} dt = \left(-\frac{1}{j2\pi f}\right)\left(e^{-j2\pi f t}\right)\Big|_{-T/2}^{+T/2} =$$

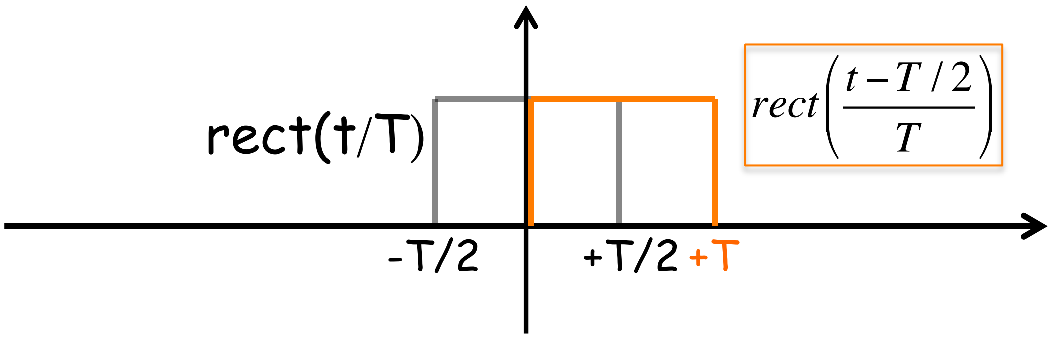
$$= \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$



Essendo lo spettro reale è sufficiente un solo grafico per rappresentarlo.
Si deve notare che all' aumentare di T (impulso + lento), la sinc, e quindi il contenuto frequenziale si concentra alle basse frequenze. Sarà maggiore il contenuto alle alte frequenze al diminuire di T (impulso + veloce)

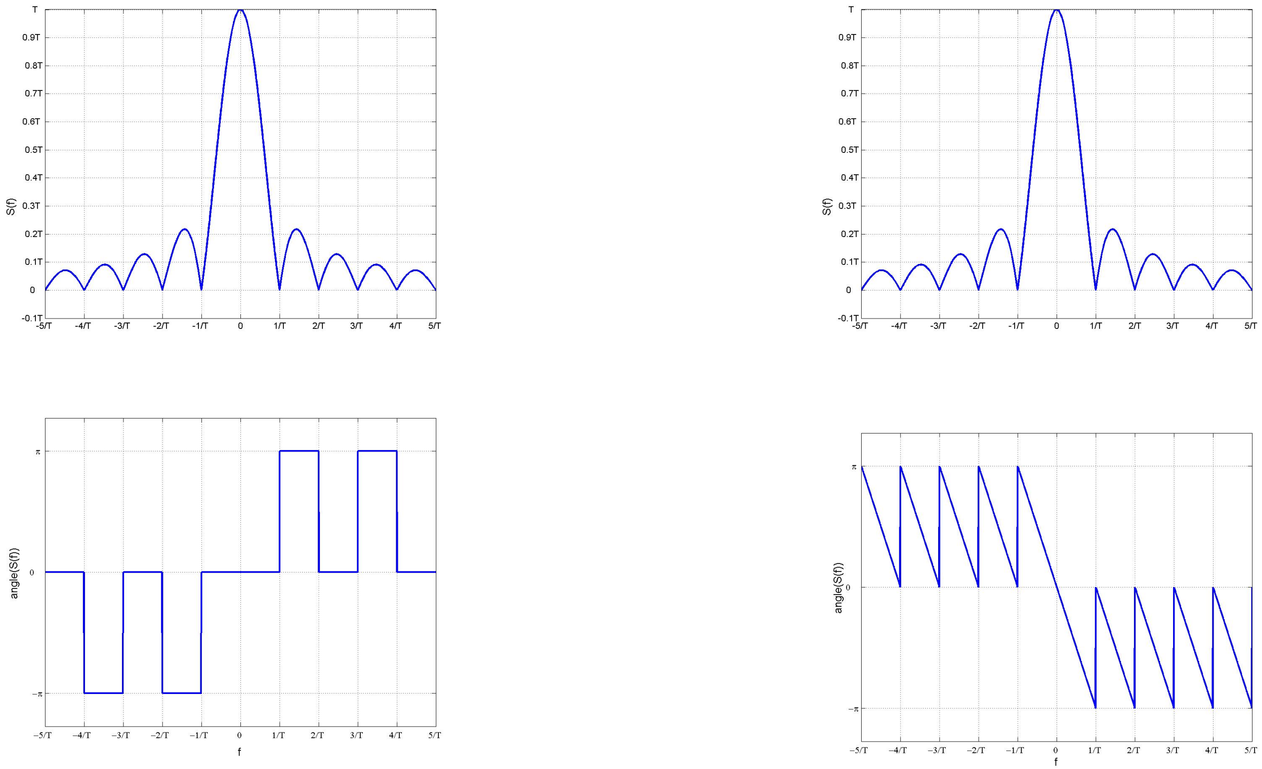
Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Vediamo cosa succede allo spettro se ritardiamo l' impulso ad esempio di T/2.



Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Nelle rappresentazioni seguenti vengono mostrati gli spettri di ampiezza e fase delle TCF dell'impulso rettangolare senza ritardo (sinistra) e con ritardo (destra)



Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà del ritardo

$$\mathrm{s}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{y}(t) = \mathrm{s}(t - t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} Y(f) = S(f)\, e^{-j2\pi t_0 f}$$

La trasformata di *y(t)* in modulo è uguale a quella del segnale non ritardato

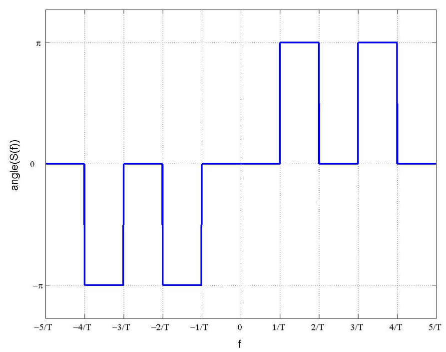
Il ritardo nel tempo comporta la somma alla fase di *S(f)* di un termine di fase lineare

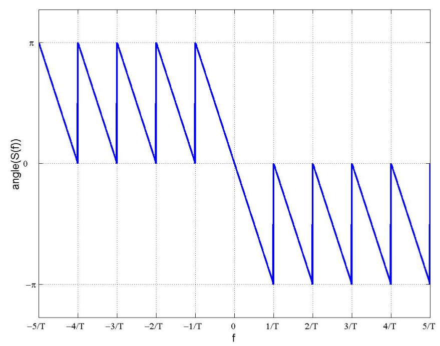
Quindi nel caso della rect vista precedentemente ritardata di T/2

$$S(f) = T\,\mathrm{sinc}(\mathrm{fT})\mathrm{e}^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = T\,\mathrm{sinc}(\mathrm{fT})\mathrm{e}^{-j\pi f T}$$

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Nel caso del impulso centrato attorno all'origine, essendo la TCF reale, la fase può valere $-\pi$, π (numero negativo) o 0 (positivo). Il ritardo dello impulso di T/2 equivale ad aggiungere alla fase dello spettro precedente un termine lineare con f pari a $-2\pi fT/2$.
La visualizzazione "spezzata" della fase in questo caso è dovuta alla visualizzazione tra $[-\pi:\pi]$.





Si deve ricordare che, nel caso di segnali reali la fase risulta simmetrica rispetto all'origine

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Di seguito elenchiamo alcune delle proprietà della TCF

Linearità

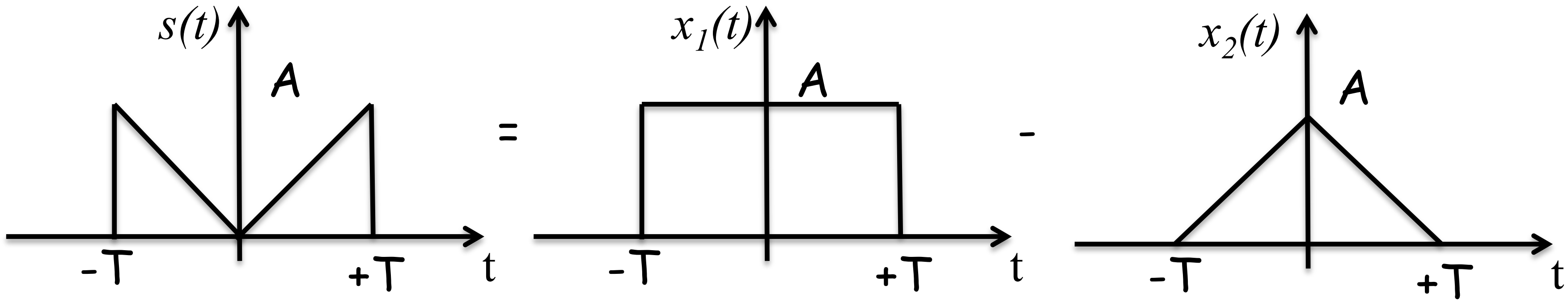
La TCF di una combinazione lineare di segnali è la combinazione lineare secondo gli stessi pesi, delle TCF dei singoli segnali

$$\mathrm{s}(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) = \sum_{i=1}^{N} a_i X_i(f)$$

con $\quad x_i(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} X_i(f) \quad \forall i$

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Linearità



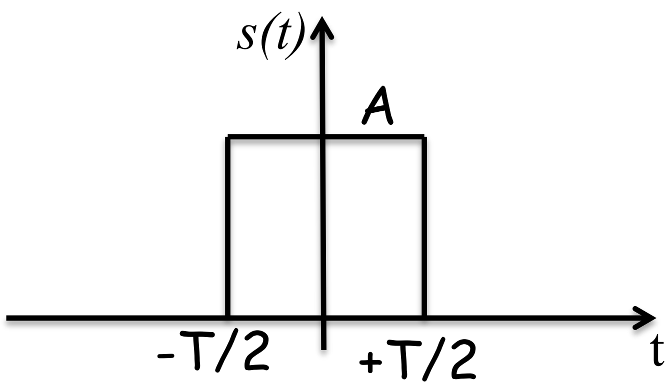
$$s(t) = x_1(t) - x_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} S(f) = X_1(f) - X_2(f)$$

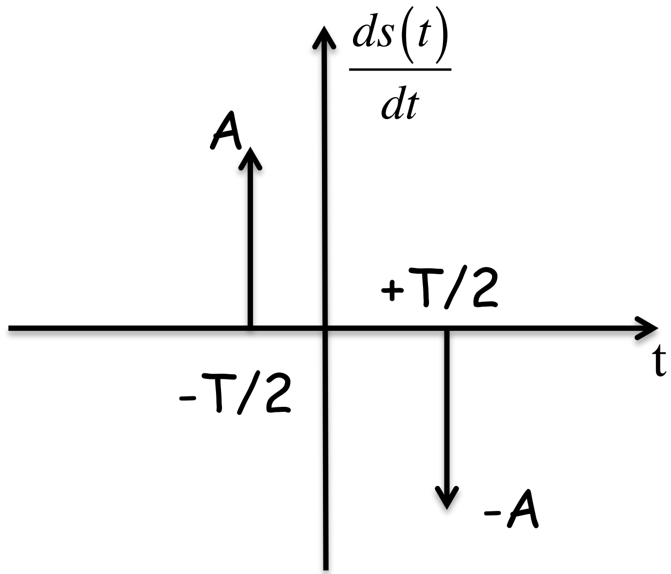
N.B. Andando avanti troveremo la trasformata di $x_2(t)$ e potremmo risolvere questa trasformata

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà della Derivazione
Dato un segnale s(t) con TCF pari a S(f),
la derivata di s(t) ha come trasformata j2πfS(f)

$$\mathrm{s}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{y}(t) = \frac{ds(t)}{dt} \overset{F}{\Leftrightarrow} Y(f) = j2\pi f S(f)$$

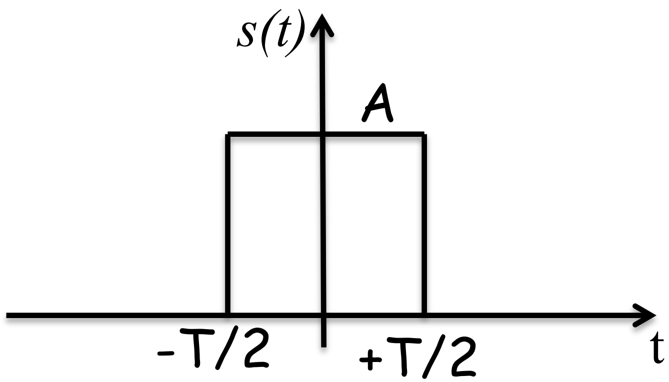


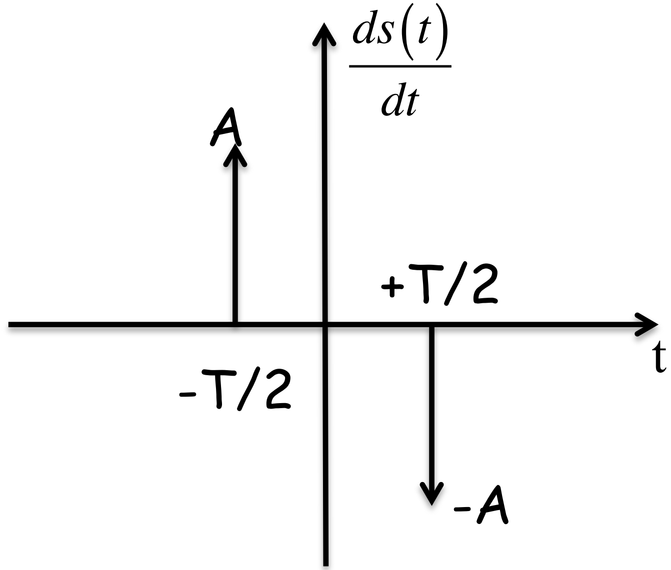


Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

$$Y(f) = j2\pi f\, S(f) = j2\pi f\, AT\,\mathrm{sinc}(fT) = j2\pi f\, AT\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} =$$

$$= j2\pi f T A\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = j2A\sin(\pi f T)$$





Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà di Integrazione (non completo)

$$\mathrm{s}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\alpha)\,d\alpha \overset{F}{\Leftrightarrow} Y(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f}$$

valido se $\mathrm{S}(0)=0$

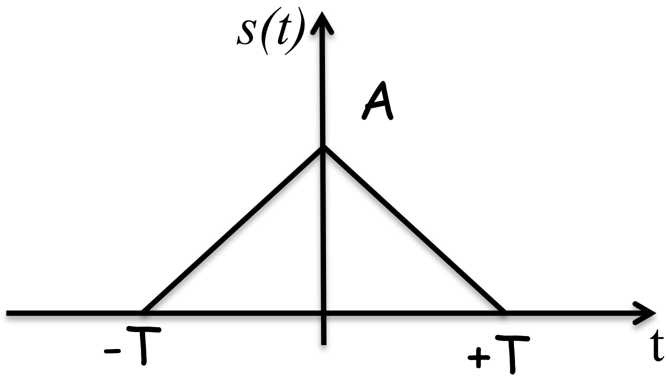
Proprietà di Integrazione

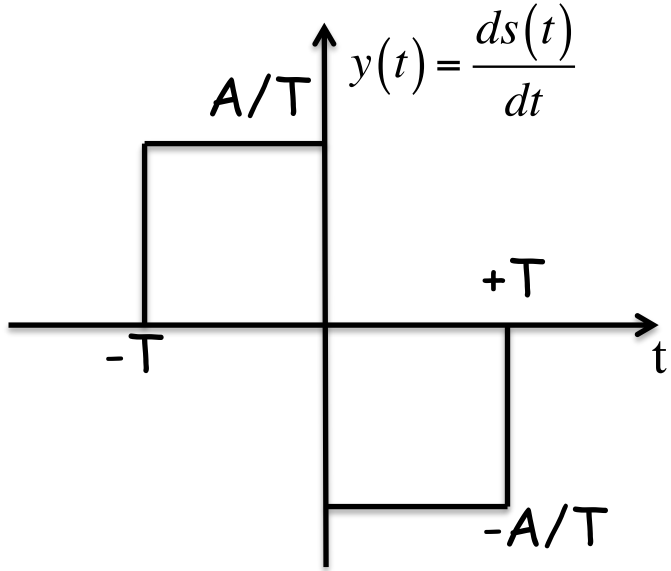
$$\mathrm{s}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\alpha)\,d\alpha \overset{F}{\Leftrightarrow} Y(f) = \frac{1}{2}\delta(f)S(0) + \frac{S(f)}{j2\pi f}$$

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Esempio di applicazione della proprietà di integrazione

Vogliamo calcolare la trasformata di s(t) ma siamo più bravi a calcolare la trasformata della derivata



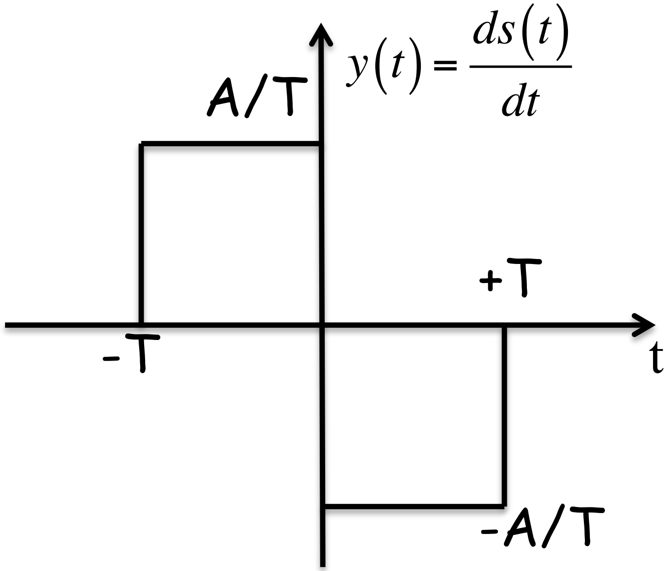


$$y(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Quindi se riusciamo a calcolare la trasformata di y(t), possiamo poi calcolare la trasformata di s(t) visto che

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\alpha)\, d\alpha$$

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier



$$y(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$y(t) = \frac{A}{T} rect\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{A}{T} rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$Y(f) = A\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{j2\pi fT/2} - A\,\mathrm{sinc}(ft)\,e^{-j2\pi fT/2} =$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) = A\,\mathrm{sinc}(fT)\, j2\sin(\pi fT)$$

Quindi applicando il teorema di integrazione

$$S(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} = A\,\mathrm{sinc}(fT)\frac{j2\sin(\pi fT)}{j2\pi f} =$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\,T\,\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà del Cambiamento di scala

$$s(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} S(f) \qquad \Rightarrow \qquad s(\alpha t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$$\text{con } \alpha \in \Re, \text{ costante}$$

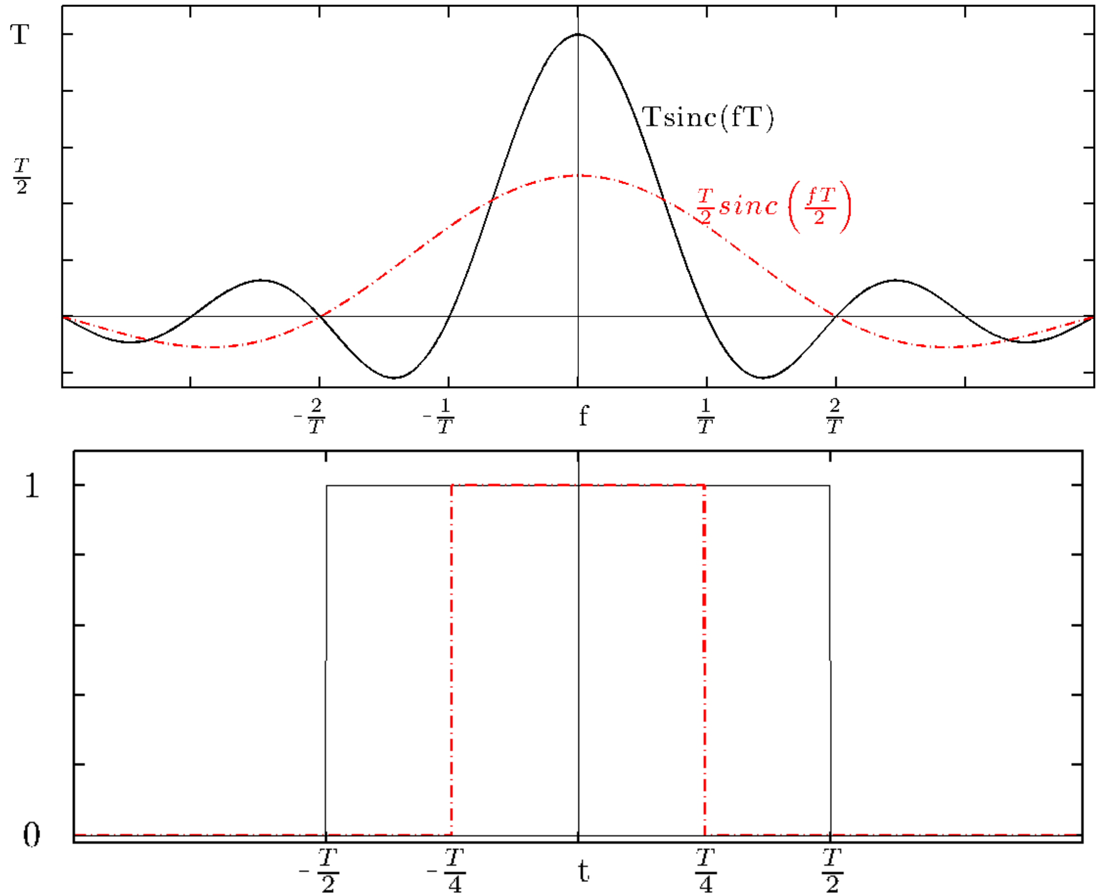
Con $|\alpha|>1$ abbiamo una compressione temporale alla quale corrisponde un'espansione frequenziale
Con $|\alpha|<1$ abbiamo un'espansione temporale alla quale corrisponde una compressione temporale

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà del Cambiamento di scala

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(f) = T sinc(fT)$$

$$y(t) = rect\left(\frac{2t}{T}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} Y(f) = \frac{T}{2} sinc\left(f\frac{T}{2}\right)$$



Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

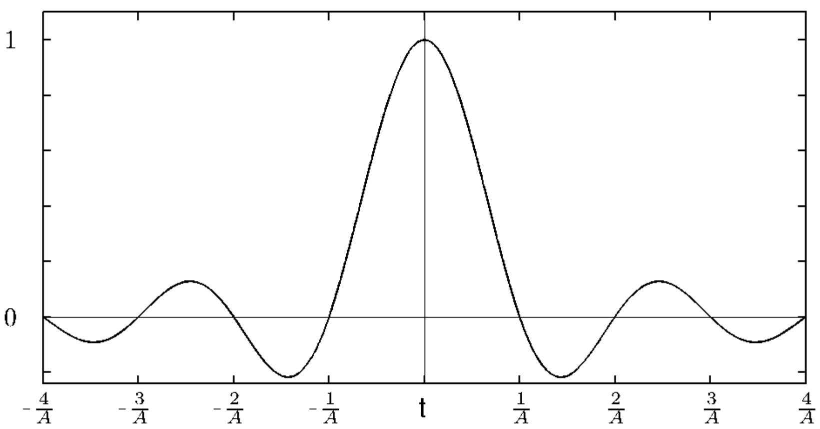
Proprietà di Dualità

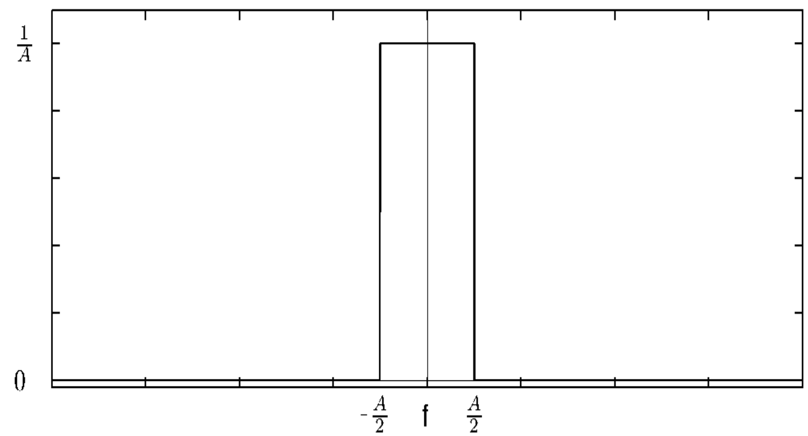
$$\mathrm{s}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{S}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{s}(-f)$$

esempi

$$s(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow S(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$s(t) = \mathrm{sinc}(At) \Leftrightarrow S(f) = s(-f) = \frac{1}{A} rect\left(\frac{-f}{A}\right) = \frac{1}{A} rect\left(\frac{f}{A}\right)$$





Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà Traslazione in frequenza

$$\mathrm{s}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{s}(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f - f_0)$$

con f_0 costante

Da questo si può introdurre il teorema della modulazione

$$\mathrm{s}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{s}(t)\cos(2\pi f_o t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{S}(f + f_0) + \mathrm{S}(f - f_0)}{2}$$

È stato ottenuto applicando la formula di Eulero al coseno

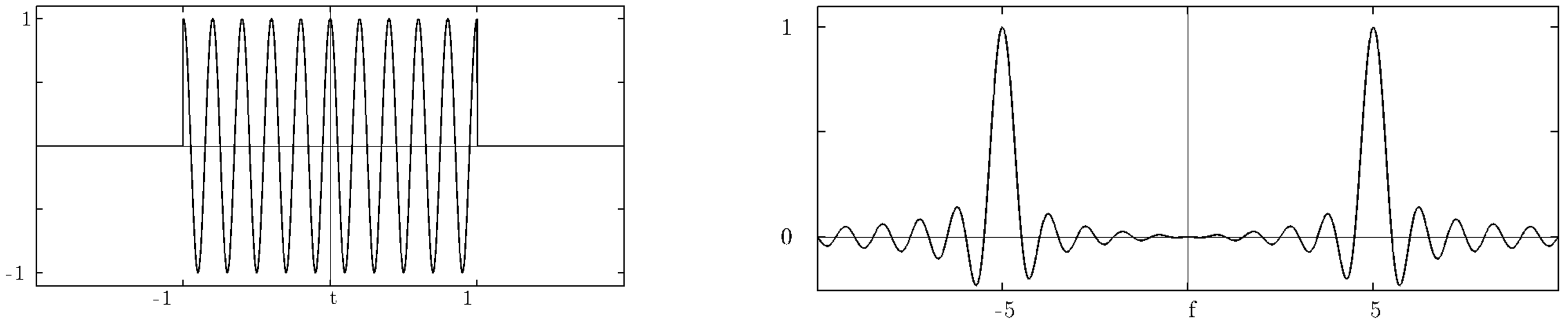
Questo teorema può spiegare la modulazione di ampiezza dove un segnale s(t) modula un segnale portante, ad esempio nelle radiofrequenze, permettendo la trasmissione di diversi segnali associati a diverse portanti

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Esempio sul teorema di modulazione

$$s(t) = \cos(2\pi 5t)\,rect\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$S(f) = \frac{2\,\mathrm{sinc}(2(f+5)) + 2\,\mathrm{sinc}(2(f-5))}{2} = \mathrm{sinc}(2(f+5)) + \mathrm{sinc}(2(f-5))$$



La trasformata è ottenuta traslando la trasformata del segnale modulante in corrispondenza a f=5 e f=-5

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà della convoluzione

$$date \quad x(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{X}(f) \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{y}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{Y}(f)$$

$$\Downarrow$$

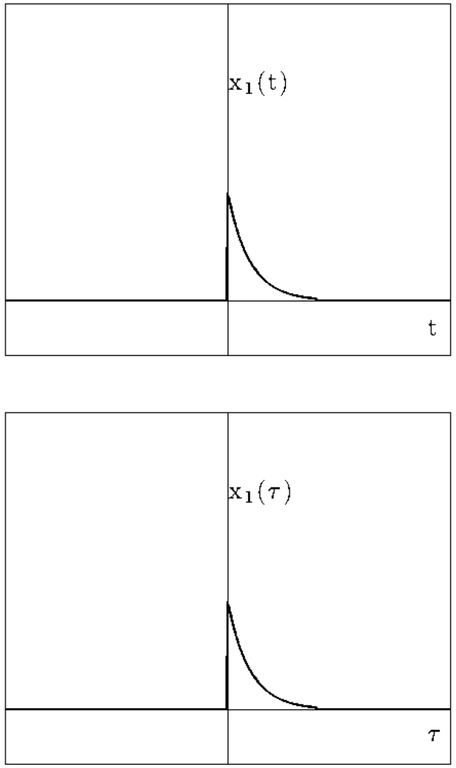
$$\mathrm{z}(t) = x(t) \otimes y(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{Z}(f) = X(f)Y(f)$$

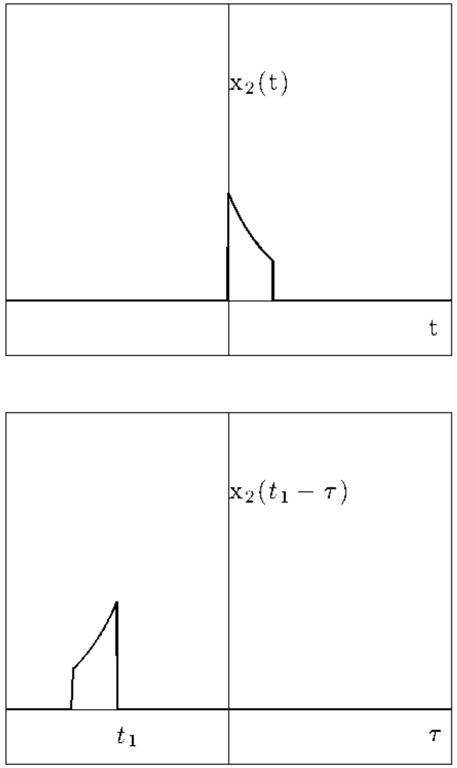
Dove la convoluzione è definita come

$$\mathrm{z}(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau$$

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

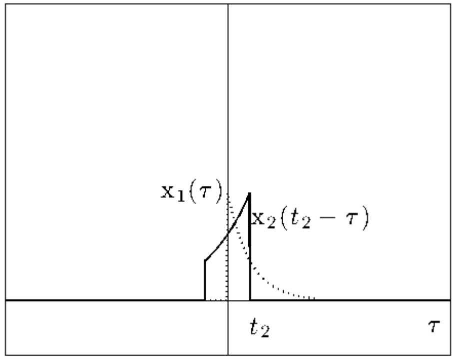
Convoluzione $z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$

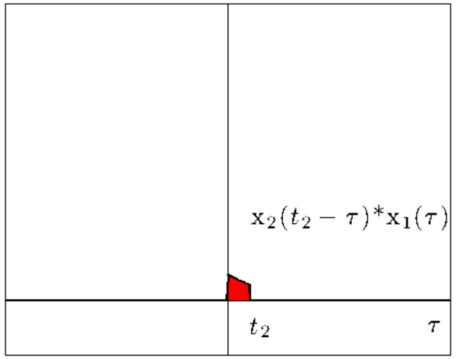


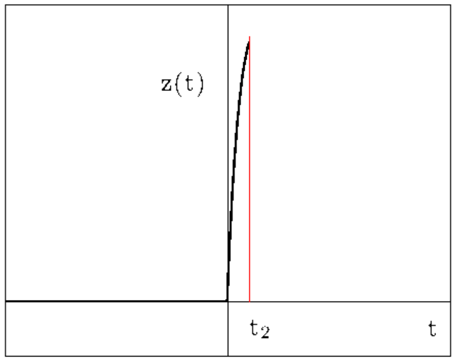


Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Convoluzione $$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

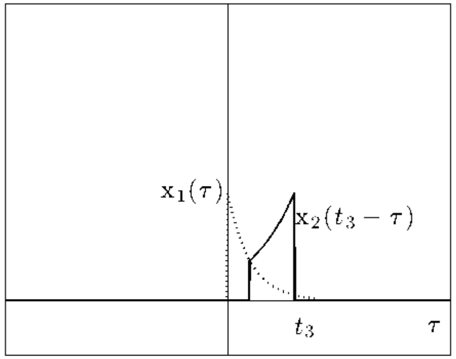


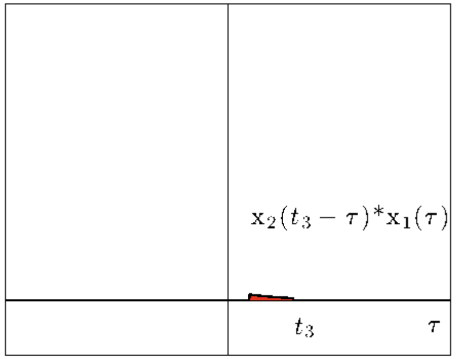


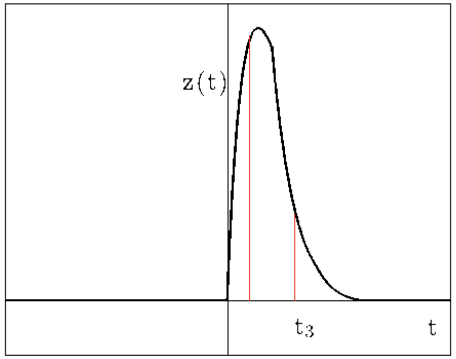


Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Convoluzione $z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$

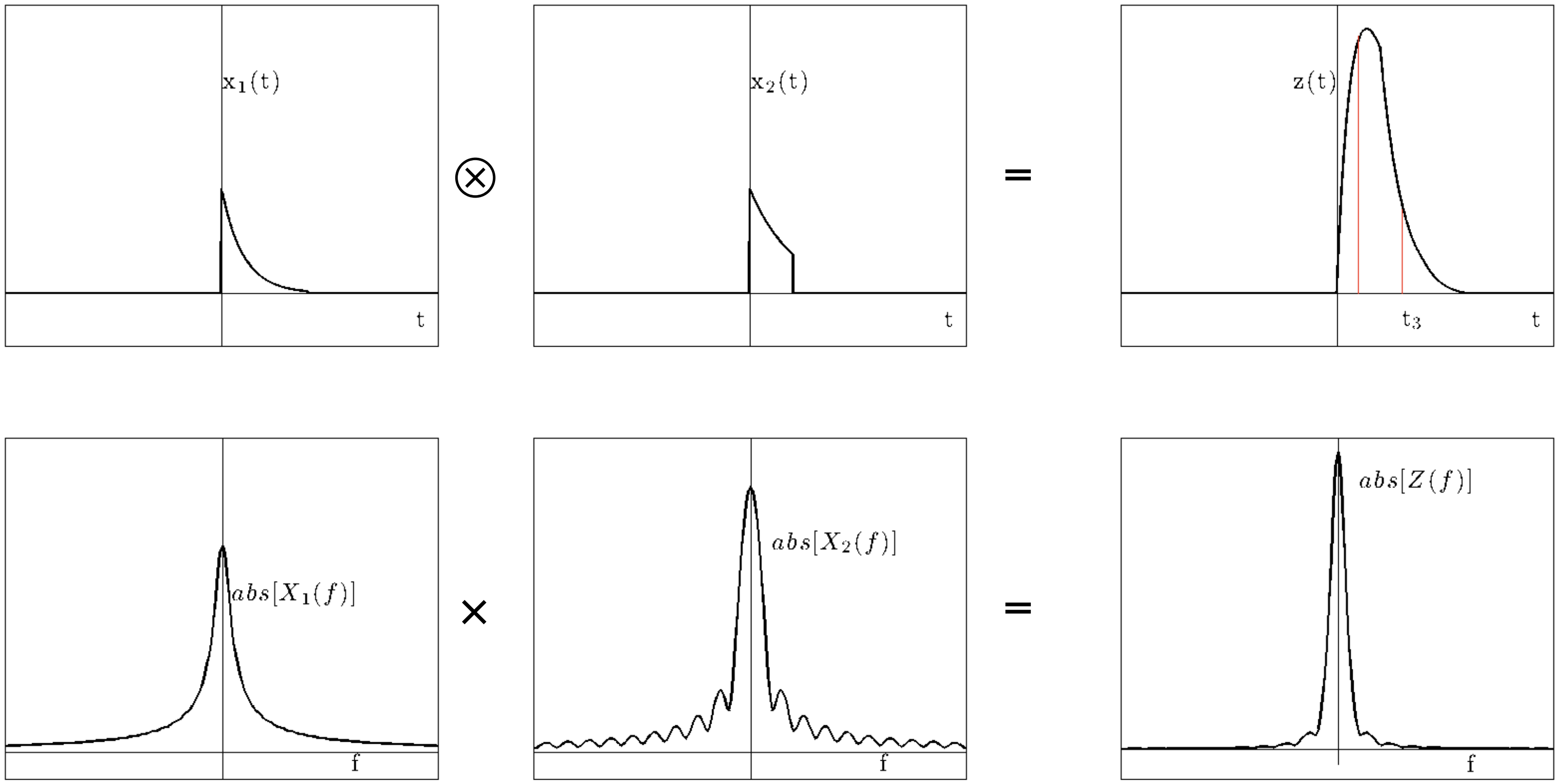






Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} Z(f) = X(f)Y(f)$$

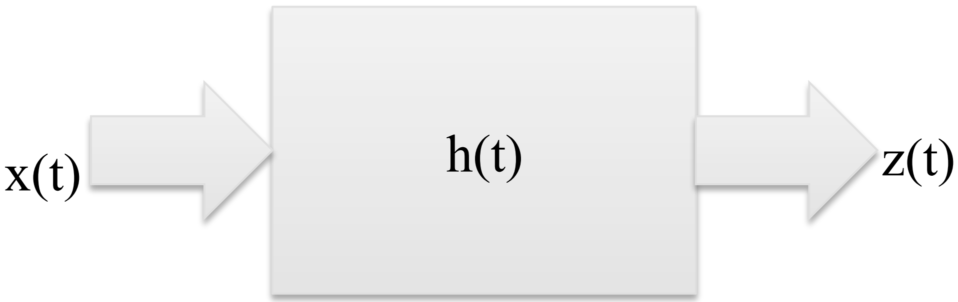


Convoluzione e TCF

La convoluzione è un'operazione di rilievo nell'Analisi dei Segnali e Sistemi

Viene utilizzata ad esempio per determinare il comportamento di sistemi ingresso-uscita

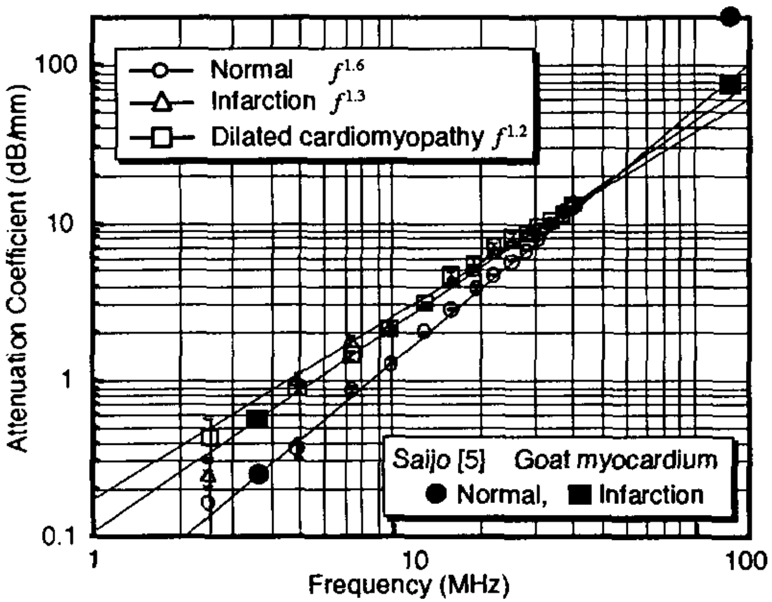
Per alcuni sistemi, come i sistemi Lineari tempo invarianti, l'uscita ad un ingresso è data dalla convoluzione tra una funzione caratteristica, detta risposta impulsiva, e l'ingresso stesso



$$z(t) = x(t) \otimes h(t)$$

Convoluzione e TCF

Coefficiente di attenuazione del tessuto miocardico ad oscillazioni ultrasoniche alle diverse frequenze



Il tessuto attenua maggiormente le oscillazioni a frequenze maggiori

Questa è una descrizione in frequenza del tessuto: detta risposta in frequenza

Nel tempo il comportamento viene descritto dalla risposta impulsiva

Kudo, N. et al, Ultrasound attenuation measurement of tissue in frequency range 2.5-40 MHz using a multi-resonance transducer Ultrasonics Symposium, 1997. Proceedings., 1997 IEEE, vol. 2: 1181 – 1184

Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

Proprietà del prodotto

$$date \quad x(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{X}(f) \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{y}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{Y}(f)$$

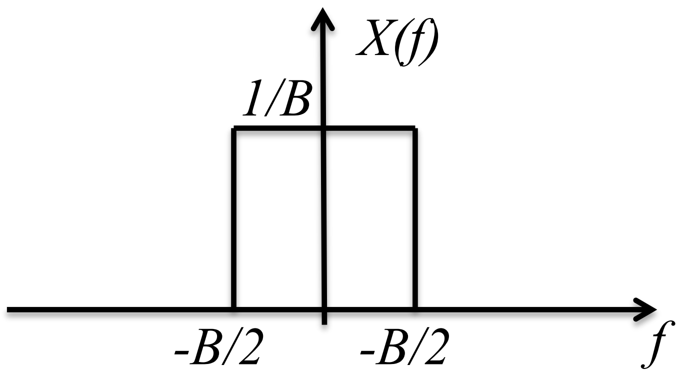
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{z}(t) = x(t)y(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{Z}(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Es.

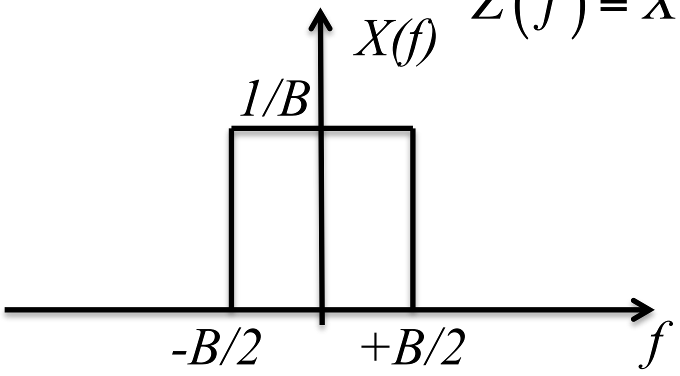
$$\mathrm{s}(t) = \left[\mathrm{sinc}(Bt)\right]^2 = \mathrm{sinc}(Bt)\mathrm{sinc}(Bt) = x(t)x(t)$$

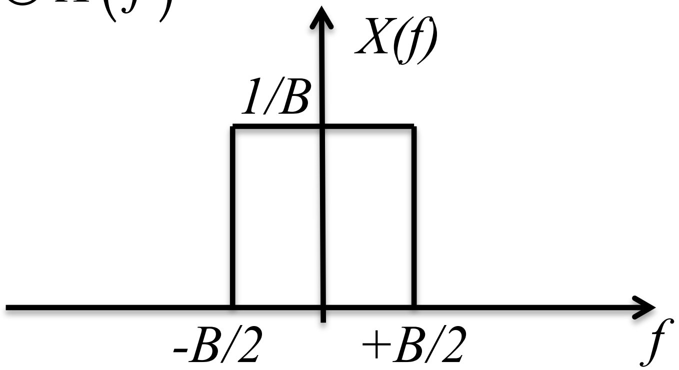
$$Z(f) = \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right) \otimes \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

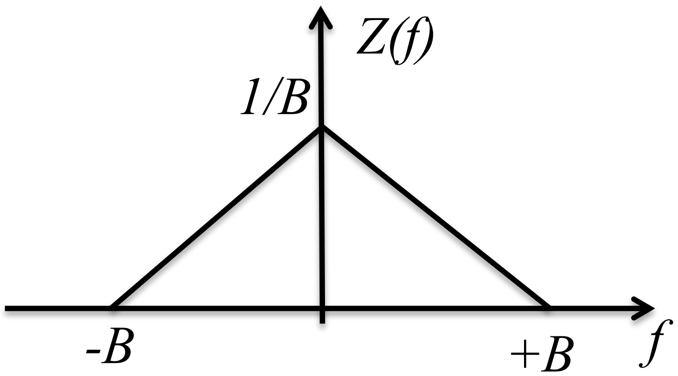


Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

$$Z(f) = X(f) \otimes X(f)$$







L'operazione di moltiplicazione nel tempo ha causato l'aumento della banda del segnale.
La convoluzione di due segnali a banda limitata comporta la nascita di un segnale la cui banda è la somma delle due bande.

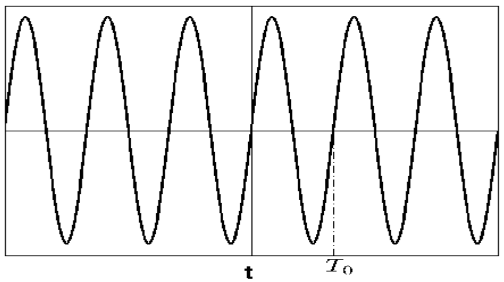
Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

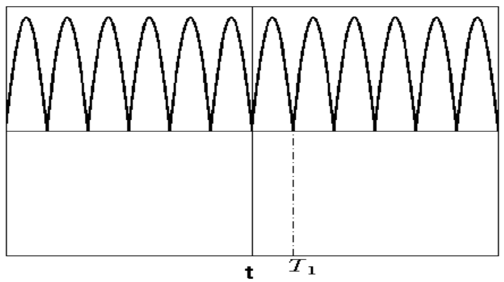
Diamo una seconda interpretazione dell'operazione appena vista.

L'operazione nel tempo è una operazione non lineare.

Astraendoci da questo caso particolare, è possibile dire che un operazione non lineare su un segnale, comporta la nascita di componenti frequenziali non presenti in precedenza

Es. Il segnale a destra è ottenuto applicando la funzione modulo a quello di sinistra
Per entrambi i segnali rispondere alle domande
-qual è la freq. Fondamentale del segnale?
-qual è il valore medio del segnale?
-quante sono le componenti necessarie per descrivere il segnale?





Estensione della TCF a Segnali a Potenza finita

Abbiamo visto che per

Segnali a tempo continuo, periodici **è possibile** utilizzare lo
Sviluppo in Serie di Fourier

Mentre per segnali a tempo continuo aperiodici **si deve** utilizzare
la Trasformata Continua di Fourier

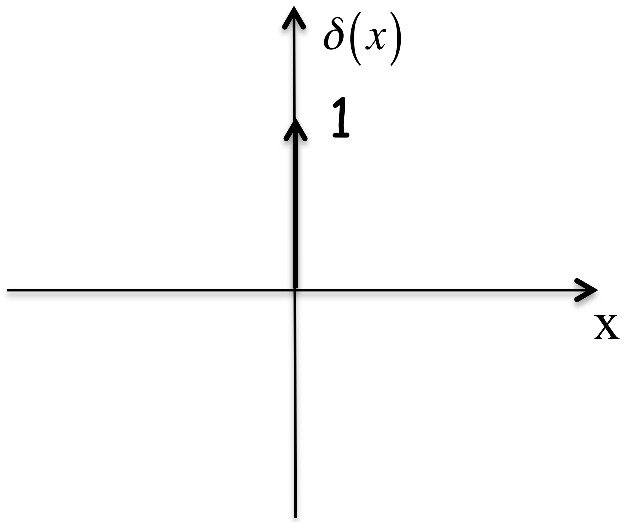
ma

è possibile estendere anche a segnali a tempo continuo, periodici
la Trasformata Continua di Fourier

Come?

Estensione della TCF a Segnali a Potenza finita

Tramite l'introduzione della funzione generalizzata, delta di Dirac

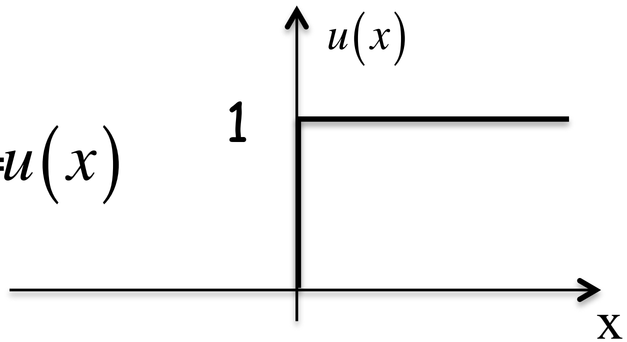


Questa funzione è definibile attraverso le sue proprietà

Proprietà campionatrice

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0 - x) f(x)\, dx = f(x_0)$$

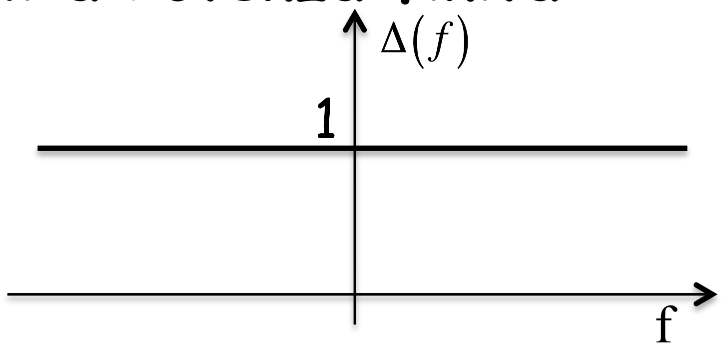
$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\alpha)\, d\alpha = u(x)$$



$$u(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x>0 \\ 0.5 \text{ per } x=0 \\ 0 \text{ per } x<0 \end{cases}$$

Estensione della TCF a Segnali a Potenza finita

Vediamo la TCF della delta di Dirac



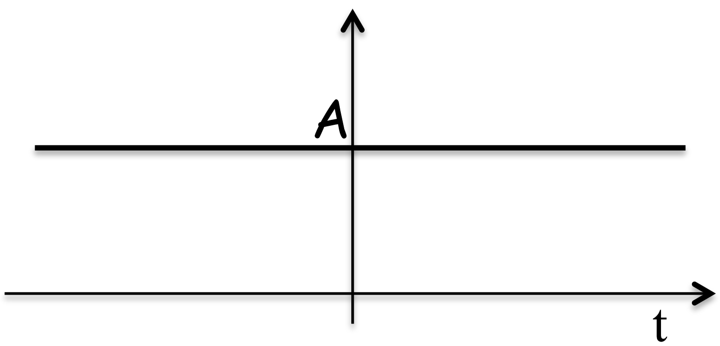
$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{j2\pi ft}\, dt = e^{j2\pi ft}\Big|_{t=0} = 1$$

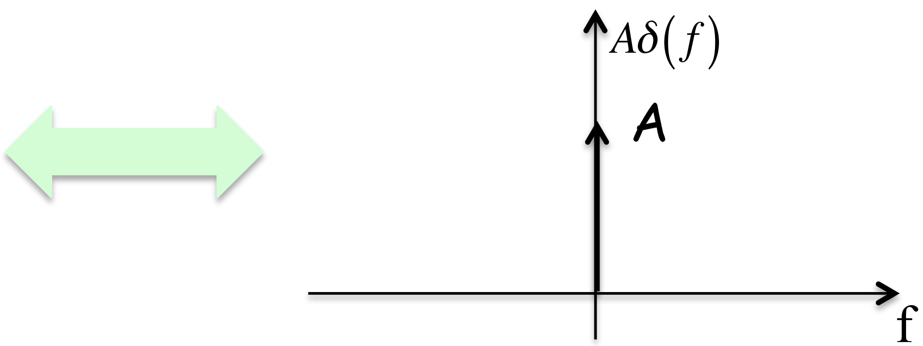
Quindi la delta di Dirac è composta da tutte le frequenze

Sfruttando le proprietà della TCF è possibile calcolare le Trasformate di Segnali a Potenza media finita

Trasformata di una costante (sfruttando la propr. di dualità)

$$A\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} A \quad \Rightarrow \quad A \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{A}\delta(-f) = \mathrm{A}\delta(f)$$

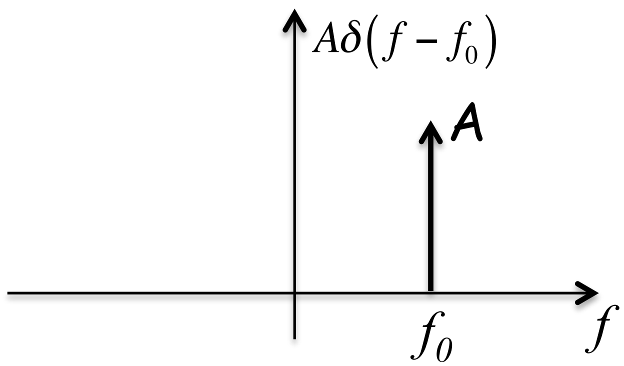




Estensione della TCF a Segnali a Potenza finita

Trasformata di una fasore (sfruttando la propr. di traslazione in frequenza e la trasformata della costante)

$$Ae^{j2\pi f_o t} \overset{F}{\Leftrightarrow} A\delta(f - f_0)$$



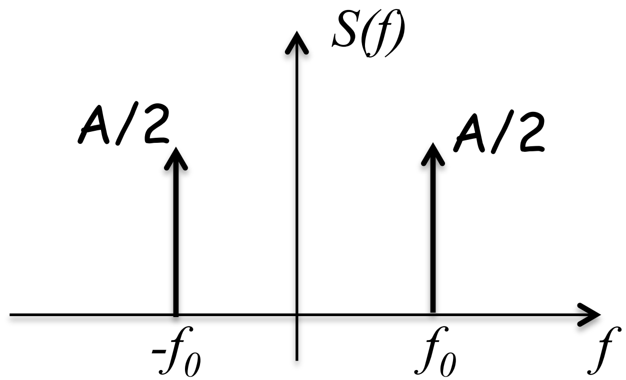
Il fasore è un segnale periodico e rappresenta una funzione della base di Fourier

È costituito da una sola frequenza: questo giustifica il fatto che la TCF è una delta di Dirac centrata nella frequenza specifica

Estensione della TCF a Segnali a Potenza finita

Dalla relazione precedente si può calcolare la TCF delle funzioni seno e coseno

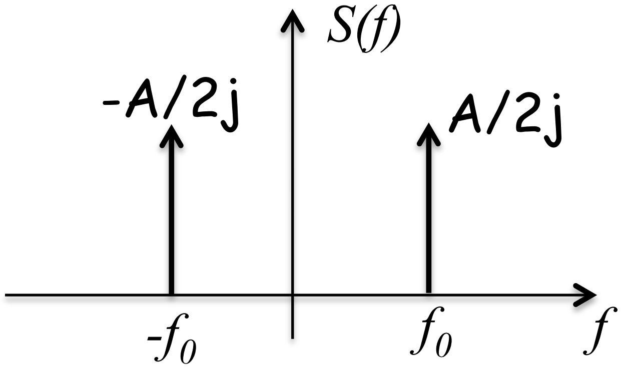
$$s(t) = A\cos(2\pi f_o t) = \frac{Ae^{-j2\pi f_o t} + Ae^{j2\pi f_o t}}{2} \overset{F}{\Leftrightarrow} S(f) = \frac{A\delta(f+f_0) + A\delta(f-f_0)}{2}$$

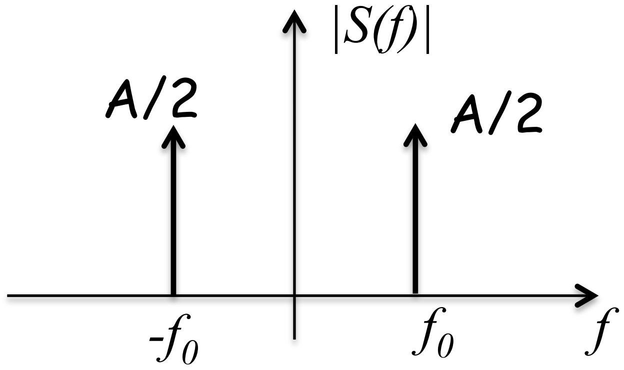


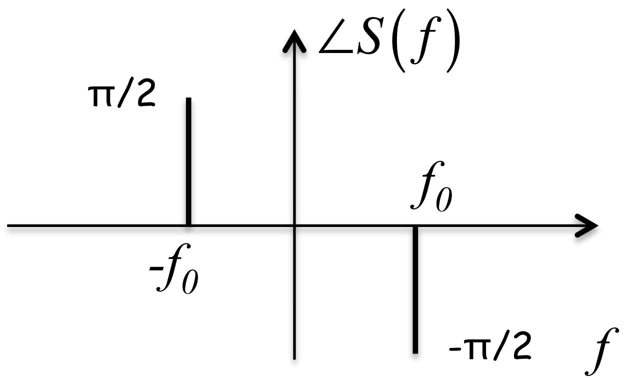
Estensione della TCF a Segnali a Potenza finita

Dalla relazione precedente si può calcolare la TCF delle funzioni seno e coseno

$$s(t) = A\sin(2\pi f_o t) = \frac{-Ae^{-j2\pi f_o t} + Ae^{j2\pi f_o t}}{2j} \overset{F}{\Leftrightarrow} S(f) = \frac{-A\delta(f+f_0) + A\delta(f-f_0)}{2j}$$







TCF applicata allo Sviluppo in Serie di Fourier

Possiamo ora calcolare la TCF di un segnale periodico generico, una volta noto lo sviluppo in serie di Fourier

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{S}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Dove è stata utilizzata la proprietà di traslazione in frequenza e la linearità della TCF

Quindi la TCF di un segnale periodico è costituita da delta centrate a frequenze multiple della frequenza f_0

La forma è analoga a quella dello sviluppo in serie ma il significato è differente
-il dominio non è discreto, ma è continuo
-al posto dei coefficienti abbiamo delle delta il cui peso è pari ai coefficienti di Fourier alla stessa frequenza

TCF applicata allo Sviluppo in Serie di Fourier

Ad esempio, riportiamo le rappresentazioni dei Coefficienti dello Sviluppo in serie di Fourier, in alto, e della TCF del segnale periodico onda quadra