

## Capitolo 2

# Sviluppo in Serie di Fourier

### 2.1 Proprietà della Serie di Fourier

Un segnale reale tempo continuo e periodico di periodo  $T_0$ , per il quale sono valide le condizioni di Dirichlet (vedi pag. 41 [1]), può essere espresso tramite la combinazione lineare seguente

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \quad (2.1)$$

Le funzioni esponenziali complesse sono fasori rotanti a velocità angolare multipla della fondamentale, pari a  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ . Il termine per  $n = 0$  rappresenta la costante. I pesi dei fasori, i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier, sono in generale numeri complessi e si trovano come

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt \quad (2.2)$$

dove l'integrale è esteso ad un intervallo pari ad un periodo. I coefficienti  $S_n$  sono numeri complessi e possono essere scritti come

$$S_n = R_n + jI_n$$

dove  $R_n$  è la parte reale e  $I_n$  è la parte immaginaria. È inoltre possibile scrivere  $S_n$  in forma polare

$$S_n = |S_n| e^{j\theta_n}$$

dove  $|S_n|$  è il modulo di  $S_n$  e  $\theta_n$  ne è la fase.

#### 2.1.1 Segnale Reale

Vediamo le proprietà dei coefficienti dello sviluppo in Serie di Fourier nel caso di segnale  $s(t)$  reale. Possiamo riscrivere la 2.2 nel seguente modo

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt = \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \left( \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) - j \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) \right) dt = \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \quad (2.3)
\end{aligned}$$

L'integrale a sinistra essendo  $s(t)$  reale, è esso stesso reale. Lo stesso si può dire per l'integrale a destra, che essendo moltiplicato per la costante immaginaria  $j$ , diviene la parte immaginaria di  $S_n$ . Detto questo possiamo scrivere

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt = R_n + jI_n \quad (2.4)$$

con

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \\
I_n &= -\frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt
\end{aligned}$$

Vediamo adesso la relazione intercorrente tra  $S_n$  e  $S_{-n}$  nel caso di segnali reali. Per questo sostituiamo a  $n$ ,  $-n$  nella 2.7 ottenendo

$$S_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \cos\left(-2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin\left(-2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt$$

Visto che il coseno è pari e il seno è dispari, si ottiene

$$\begin{aligned}
S_{-n} &= \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt + j \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt = \\
&= R_n - jI_n = S_n^* \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Riassumendo possiamo dire che condizione necessaria e sufficiente affinché un segnale tempo continuo periodico e per il quale può essere calcolato lo Sviluppo in Serie di Fourier, sia *reale* è che

$$S_n = S_{-n}^* \quad (2.6)$$

e quindi

$$R_n = R_{-n} \quad I_n = -I_{-n} \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Segnale Pari o Dispari

Vediamo le proprietà dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier nel caso di segnale pari o dispari, indipendentemente dal fatto che esso sia reale, immaginario puro o in generale complesso.

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \quad (2.8)$$

#### Segnale Pari

Consideriamo il caso di segnale pari, ovvero per il quale  $s(t) = s(-t) \forall t$ , la 2.8 può essere scritta come

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} \underbrace{s(t)}_{\text{pari}} \underbrace{\cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)}_{\text{pari}} dt - j \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} \underbrace{s(t)}_{\text{pari}} \underbrace{\sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)}_{\text{dispari}} dt \quad (2.9)$$

Essendo l'argomento del primo integrale il prodotto di una funzione pari con una pari, è esso stesso pari, mentre l'argomento del secondo risulta dispari. Se l'intervallo di integrazione di ampiezza  $T_0$  è preso in modo simmetrico rispetto all'origine si vede facilmente come l'integrale a destra nella equazione precedente risulta nullo, mentre il primo si può scrivere come

$$S_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt$$

Dalla precedente si evince anche che  $S_n = S_{-n}$ . Ricordiamo che questo risultato è stato ottenuto per un segnale generico, sia esso reale, immaginario puro o in generale complesso.

#### Segnale Dispari

Consideriamo il caso di segnale dispari, ovvero per il quale  $s(t) = -s(-t) \forall t$ , la 2.8 può essere scritta come

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} \underbrace{s(t)}_{\text{dispari}} \underbrace{\cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)}_{\text{pari}} dt - j \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} \underbrace{s(t)}_{\text{dispari}} \underbrace{\sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)}_{\text{dispari}} dt \quad (2.10)$$

Essendo l'argomento del primo integrale il prodotto di una funzione dispari con una pari, è esso stesso dispari, mentre l'argomento del secondo risulta pari, visto che è ottenuto come prodotto tra due funzioni dispari. Se l'intervallo di integrazione di ampiezza  $T_0$  è preso in modo simmetrico rispetto all'origine si vede facilmente come l'integrale a sinistra nella equazione precedente risulta nullo, mentre il secondo si può scrivere come

$$S_n = -j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt$$

Dalla precedente si evince anche che  $S_n = -S_{-n}$ .

Riassumendo i risultati precedenti possiamo dire che condizione necessaria e sufficiente affinché un segnale tempo continuo periodico e per il quale può essere calcolato lo Sviluppo in Serie di Fourier, sia *pari* è che  $S_n = S_{-n}$ .

Mentre condizione necessaria e sufficiente affinché un segnale tempo continuo periodico e per il quale può essere calcolato lo Sviluppo in Serie di Fourier, sia *dispari* è che  $S_n = -S_{-n}$ .

$$s(t) = s(-t) \quad \forall t \quad \iff \quad S_n = S_{-n}$$

$$s(t) = -s(-t) \quad \forall t \quad \iff \quad S_n = -S_{-n}$$

### 2.1.3 Forma Trigonometrica dello Sviluppo in Serie di Fourier

Se riscriviamo lo Sviluppo in Serie di Fourier 2.1 utilizzando la formula di Eulero (cfr. 1.7) e considerando  $S_n = R_n + jI_n$  si ottiene

$$\begin{aligned} s(t) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) + \\ & + j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se il segnale è reale per cui valgono le 2.7 si ha che gli ultimi due termini dell'equazione precedente sono nulli. Infatti i prodotti all'interno delle due sommatorie, rispettivamente  $R_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)$  e  $I_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)$  sono dispari rispetto a  $n$ .

Essendo gli argomenti delle prime due sommatorie funzioni pari in  $n$  possiamo scrivere

$$s(t) = R_0 + 2 \sum_{n=-1}^{+\infty} \left[ R_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) - I_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) \right] \quad (2.12)$$

#### 2.1.4 Forma Polare dello Sviluppo in Serie di Fourier

Se riscriviamo lo Sviluppo in Serie di Fourier 2.1 per un segnale reale, utilizzando la formula di Eulero (cfr. 1.7) e considerando

$$S_n = |S_n| e^{j\theta_n}$$

e quindi

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \quad (2.13)$$

se consideriamo elementi della serie con indici opposti  $S_m$  e  $S_{-m}$ , il contributo di questi termini per la ricostruzione del segnale è

$$\begin{aligned} S_m e^{j2\pi m \frac{t}{T_0}} + S_{-m} e^{-j2\pi m \frac{t}{T_0}} &= \\ &= |S_m| e^{j\theta_m} e^{j2\pi m \frac{t}{T_0}} + |S_{-m}| e^{j\theta_{-m}} e^{-j2\pi m \frac{t}{T_0}} = \\ &= 2|S_m| \cos\left(2\pi m \frac{t}{T_0} + \theta_n\right) \end{aligned}$$

quindi sostituendo nell'equazione 2.13, si ottiene lo sviluppo in Serie di Fourier in forma polare per segnali reali.

$$s(t) = R_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2|S_n| \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0} + \theta_n\right)$$

## 2.2 Sviluppo in Serie di Fourier di alcuni segnali

### 2.2.1 Onda a dente di sega

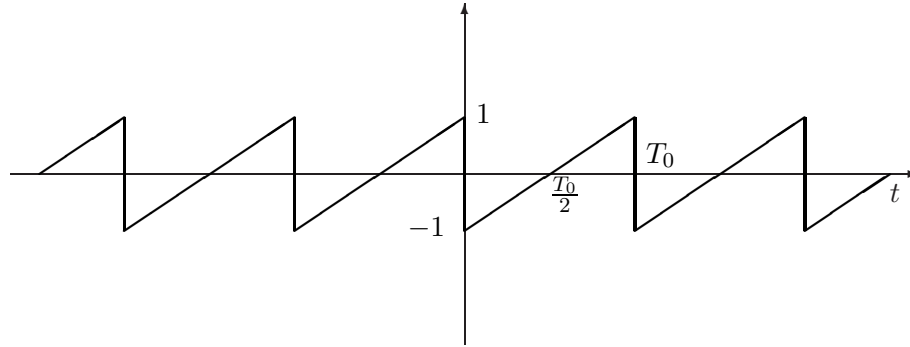


Figura 2.1: Segnale a Dente di Sega

Il segnale è reale e dispari. Di conseguenza i coefficienti della Serie di Fourier (SF) sono immaginari e dispari (cfr. 2.1.2) e il coefficiente per  $n=0$  vale 0. I coefficienti per  $n \neq 0$  quindi si trovano come

$$S_n = -j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt$$

Sostituendo il valore del segnale nell'intervallo  $(0, \frac{T_0}{2})$  che risulta pari a  $s(t) = -1 + \frac{2t}{T_0}$  si ottiene

$$\begin{aligned} S_n &= -j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(-1 + \frac{2t}{T_0}\right) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt = \\ &= j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt - j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2t}{T_0}\right) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt = \\ &= j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} \left[-\cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)\right] \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} - j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{2t}{T_0} \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \end{aligned}$$

L'integrale a sinistra può essere risolto per parti

$$\begin{aligned}
 S_n &= j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} [1 - \cos(\pi n)] - j \frac{4}{T_0^2} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} t \left( -\frac{d}{dt} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) \right) dt = \\
 &= j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} [1 - \cos(\pi n)] + j \frac{4}{T_0^2} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} t \frac{d}{dt} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt = \\
 &= j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} [1 - \cos(\pi n)] + j \frac{4}{T_0^2} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} \left\{ \left[ t \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) \right] \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} - \int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \right\} = \\
 &= j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} [1 - \cos(\pi n)] + j \frac{4}{T_0^2} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} \left\{ \left[ \frac{T_0}{2} \cos(\pi n) \right] - \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \right\} = \\
 &= j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} [1 - \cos(\pi n)] + j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} \cos(\pi n) - j \frac{4}{T_0^2} \frac{1}{\left(\frac{2\pi n}{T_0}\right)^2} \sin(\pi n) \}
 \end{aligned}$$

il secondo ed il terzo termine si annullano a vicenda, mentre il quarto termine vale zero essendo  $n$  intero. Quindi i coefficienti risultano

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ j \frac{1}{\pi n} & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

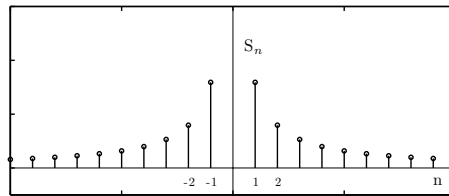


Figura 2.2: Spettro di Ampiezza dell'Onda a Dente di Sega

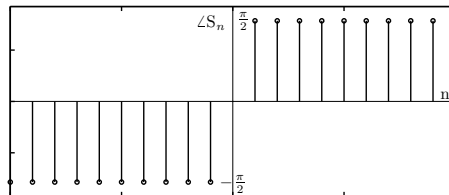


Figura 2.3: Spettro di Fase dell'Onda a Dente di Sega

Consideriamo adesso il segnale in figura 2.4. Il segnale può essere visto come l'onda a dente di sega di figura 2.1 traslato di  $\frac{T_0}{2}$ . Anche questo caso il segnale è dispari e i coefficienti possono essere trovati come nel caso precedente, utilizzando la formula 2.2.1, dove però il valore del segnale nell'intervallo  $(0, \frac{T_0}{2})$  risulta pari a  $s(t) = \frac{2t}{T_0}$ .

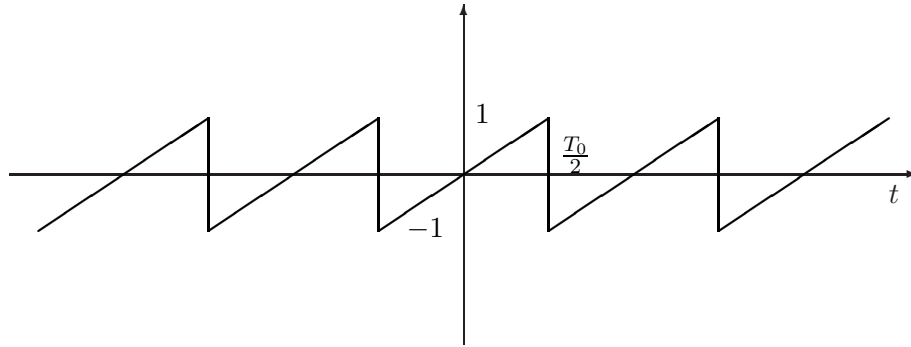


Figura 2.4: Segnale a Dente di Sega

Il calcolo dei coefficienti per  $n \neq 0$  risulta quindi

$$\begin{aligned} S_n &= -j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left( \frac{2t}{T_0} \right) \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T_0} \right) dt = \\ &= +j \frac{2}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}} \cos(\pi n) = \frac{j}{\pi n} \cos(\pi n) \\ &= \frac{j}{\pi n} (-1)^n \end{aligned}$$

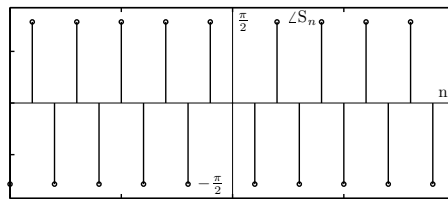


Figura 2.5: Spettro di Fase dell'Onda a Dente di Sega di figura 2.4

Se confrontiamo i coefficienti ottenuti con quelli della prima onda a dente di sega studiata, si vede come il modulo dei coefficienti non cambia, mentre si modifica la fase. Si dimostrerà in seguito che un ritardo temporale di valore  $T_a$  applicato al segnale, comporta una variazione della fase del coefficiente complesso con indice  $n$  pari a  $-2\pi \frac{n}{T_0} T_a$ . In questo caso avremo quindi una variazione della fase pari a  $-2\pi \frac{n}{T_0} \frac{T_0}{2} = -n\pi$ . In figura 2.5 riportiamo la



rappresentazione della fase dei coefficienti. Si tenga conto del fatto che è stato scelto di rappresentare la fase dei coefficienti utilizzando l'intervallo  $(-\pi, \pi)$ . Si ricorda inoltre che il modulo del coefficiente per  $n=0$  è pari a 0.



# Bibliografia

- [1] Luigi Landini (2005) *Fondamenti di Analisi di Segnali Biomedici* con ESERCITAZIONI IN MATLAB, Plus Pisa University Press ed.
- [2] Marco Luise, Giorgio M. Vitetta (2009) *Teoria dei Segnali* McGraw Hill ed.
- [3] Lucio Verrazzani (1983) *Teoria dei Segnali. Segnali Determinati* ETS ed.