ASB/MASB 03/02/14 Test 1.

Esercizio 2 (12 punti) Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita

$$y(t) = x(t) - x(t - 3T_0)$$

- Si dimostri se il sistema è lineare e tempo invariante
- Si trovi la risposta in frequenza del sistema e se ne faccia il grafico modulo e fase
- si trovi l'uscita del sistema al segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t-k6T_0}{3T_0}\right)$
- si discuta il risultato ottenuto con considerazioni sul contenuto frequenziale del segnale e sulla risposta in frequenza del sistema

Indicazioni per la Risoluzione

Dimostrazione linearità

se mandiamo in ingresso $x_1(t)$, in uscita troviamo $y_1(t) = x_1(t) - x_1(t - 3T_0)$
se mandiamo in ingresso $x_2(t)$, in uscita troviamo $y_2(t) = x_2(t) - x_2(t - 3T_0)$

Consideriamo adesso un terzo ingresso, combinazione lineare a coefficienti costanti dei precedenti ingressi. Per dimostrare la linearità, l'uscita dovrà essere combinazione lineare tramite i medesimi coefficienti, delle uscite ottenute dando in ingresso gli ingressi precedenti, singolarmente.

$x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ a questo ingresso l'uscita è

$y_3(t) = x_3(t) - x_3(t - 3T_0) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ $-Ax_1(t - 3T_0) - Bx_2(t - 3T_0)$
questa uscita va confrontata con

$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) = A\big(x_1(t) - x_1(t - 3T_0)\big) + B\big(x_2(t) - x_2(t - 3T_0)\big)$ che con semplici passaggi si vede coincidere con l'uscita precedente.

Dimostrazione Tempo Invarianza

se mandiamo in ingresso $x_1(t)$, in uscita troviamo $y_1(t) = x_1(t) - x_1(t - 3T_0)$

nel caso di sistema tempo invariante se ritardiamo l'ingresso ci aspettiamo ancora l'uscita ma ritardata della stessa quantità

Consideriamo l'ingresso ritardato $x_2(t) = x_1(t - T_A)$
Allora l'uscita vale $y_2(t) = x_2(t) - x_2(t - 3T_0) = x_1(t - T_A) - x_1(t - T_A - 3T_0)$

Questa va confrontata con $y_1(t - T_A) = x_1(t - T_A) - x_1(t - T_A - 3T_0)$
Quindi il sistema è tempo invariante.

Risposta in frequenza

In questo caso possiamo agire in uno dei seguenti modi

1) trovare la risposta impulsiva e farne la TCF.

   $x(t) = \delta(t)$ ingresso impulsivo

   $h(t) = \delta(t) - \delta(t - 3T_0)$

   quindi la risposta in frequenza risulta $H(f) = 1 - e^{-j2\pi f 3T_0}$

2) la risposta alla frequenza *f* può essere trovata mandando un fasore complesso a tale frequenza in ingresso al sistema e valutando l'uscita nel tempo. Il rapporto tra uscita e ingresso in questo caso, è il valore della risposta in frequenza per tale valore di *f*.

   $x(t) = e^{-j2\pi ft}$
   $y(t) = H(f)e^{-j2\pi ft}$
   Quindi la risposta in frequenza alla frequenza *f* si può trovare come

$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)}\Big|_{x(t)=e^{-j2\pi f t}}$

è importante ricordare come questa relazione è valida per una data frequenza e solo se l'ingresso è pari a quello visto.

3) Trasformando membri destro e sinistro della relazione ingresso uscita e poi eseguendo il rapporto dell'uscita e dell'ingresso in frequenza

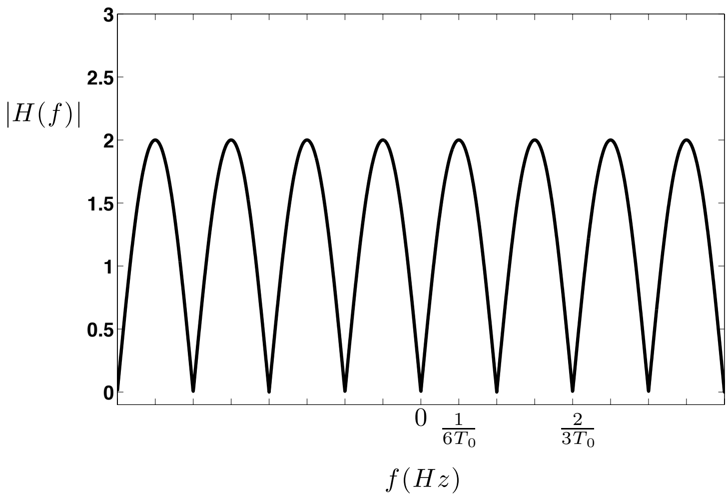
$y(t) = x(t) - x(t - 3T_0)$
$Y(f) = X(f) - X(f)e^{-j2\pi 3T_0 f} = X(f)(1 - e^{-j2\pi 3T_0 f})$

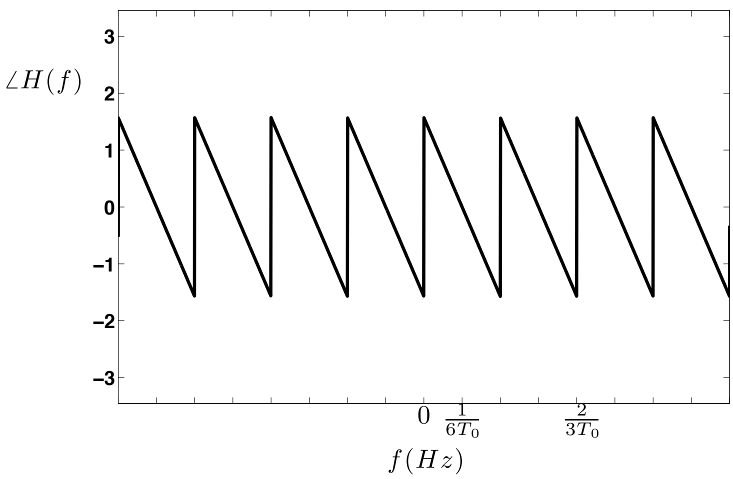
quindi $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = 1 - e^{-j2\pi 3T_0 f}$

Grafico modulo e fase

In questo caso è possibile semplificare *H(f)* in questo modo

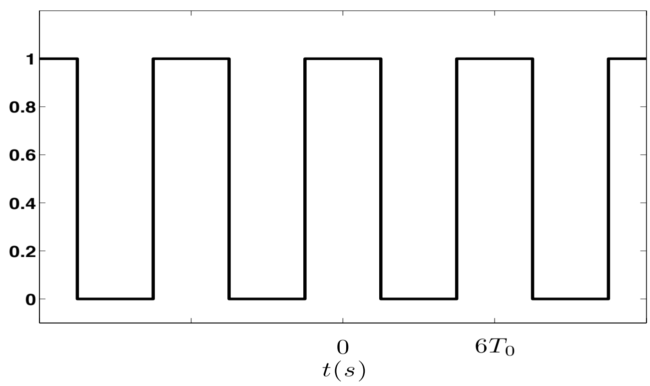
$H(f) = 1 - e^{-j2\pi 3T_0 f} = e^{-j\pi 3T_0 f}(e^{j\pi 3T_0 f} - e^{-j\pi 3T_0 f}) = e^{-j\pi 3T_0 f} 2j\, sin(\pi 3T_0 f)$





Troviamo l'uscita al segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t-k6T_0}{3T_0}\right)$

Prima di tutto disegniamo il segnale



Essendo un'onda quadra, diversamente dalla rettangolare, ha tutte le componenti armoniche di ordine pari uguali a zero.

Quindi oltre la componente per *f*=0 che rappresenta il valore medio, le altre componenti diverse da zero sono tutte multiple della prima armonica o fondamentale $f_0 = \frac{1}{6T_0}$

Le componenti diverse da zero sono infinite e sono centrate nelle frequenze kf_0 con k appartenenti agli interi relativi, dispari.

Se osserviamo che l'operazione di filtraggio in frequenza è una moltiplicazione tra la risposta in frequenza del filtro e la trasformata dell'ingresso, notiamo che le diverse componenti del segnale vengono moltiplicate per i punti nei quali il modulo della risposta in frequenza vale 2 e la fase vale 0, o comunque un multiplo di 2π.

Questo si può osservare calcolando la risposta in frequenza per le frequenze kf_0 .

$$H(kf_0) = H\left(\frac{k}{6T_0}\right) = 1 - e^{-j2\pi 3T_0 \frac{k}{6T_0}} = 1 - e^{-j\pi k} = 2 \text{ per } k \neq 0$$

e

$$H(0) = 0$$

Quindi, tutte le componenti frequenziali del segnale sono moltiplicate per 2, eccetto la componente continua che viene moltiplicata per 0. Il risultato è ancora un'onda quadra, ma di ampiezza doppia e a valore medio nullo.

A tale risultato si poteva giungere notando che il sistema non fa altro che sottrarre all'ingresso una versione ritardata dell'ingresso stesso.

Nel caso particolare dato, è molto semplice trovare il risultato per via grafica.