## ANALISI DI FOURIER

Analisi di Fourier di sequenze bidimensionali o Immagini

-Definizioni di Sequenze Bidimensionali o Immagini
-Trasformata Discreta di Fourier 2D
-Interpretazione Piano di Fourier
-Esempi

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

In seguito prenderemo in esame la trasformata bidimensionale. Per fare questo passeremo attraverso la definizione di alcune distribuzioni di dati bidimensionali: queste possono essere pensate come matrici di dati. Un esempio sono le matrici che descrivono immagini di intensità.
Le immagini RGB si possono descrivere tramite tre matrici di valori che descrivono il valore intensità di ciascuna componente (Red Green Blue)

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

Analogamente al caso monodimensionale possiamo definire:

la sequenza ad impulso unitario $\delta(n_1,n_2)=\begin{cases}1 & n_1=n_2=0\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

la sequenza ad impulso di linea x(n1,n2) = δ(n1)
x(n1,n2) = δ(n2)

la sequenza a gradino $u(n_1,n_2)=\begin{cases}1 & n_1\geq 0; n_2\geq 0\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

sequenza ad impulso unitario ritardato

$$\delta(n_1-m_1,n_2-m_2)=\begin{cases}1 & n_1=m_1; n_2=m_2\\ 0 & n_1\neq m_1; n_2\neq m_2\end{cases}$$

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

In base a questa ultima relazione si ha che una immagine o sequenza bidimensionale può essere descritta come

$$x(n_1,n_2)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}x(m_1,m_2)\delta(n_1-m_1,n_2-m_2)$$

La trasformata discreta di Fourier bidimensionale è descritta dalla seguente relazione

$$X(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}x(n_1,n_2)e^{j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1+j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2}$$

Si deve notare che l'operazione equivale alla composizione di una TDF lungo una dimensione seguita da una TDF lungo l'altra

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

L'operazione inversa si può esprimere come

$$x(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}X(k_1,k_2)e^{-j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1-j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2}$$

Analogamente al caso monodimensionale una "sequenza bidimensionale" può essere scomposta in oscillazioni complesse, con frequenza variabile, pesate dai coefficienti complessi $X(k_1,k_2)$

Rimangono valide le considerazioni svolte nel caso della TD monodimensionale relativamente al numero di funzioni complesse necessarie per rappresentare la sequenza 2D e per la taratura dell'asse frequenziale

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

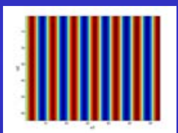
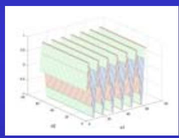
L'insieme dei coefficienti complessi $X(k_1,k_2)$ è rappresentabile su un piano, detto piano di Fourier.

Gli esempi che seguono servono ad aiutare nell'interpretazione dei punti del piano.

In particolare vedremo le TDF 2D di immagini di intensità il cui valore il cui andamento può essere descritto da una funzione sinusoidale, variabile lungo $n_1$, poi lungo $n_2$

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

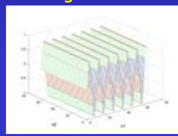
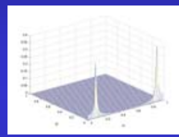
La figura in basso mostra un'immagine la cui intensità varia sinusoidalmente lungo n1. La variazione è evidenziata dal cambio di colore: l'immagine che appare continua, in è realizzata a partire da una matrice di valori e ogni pixel dell'immagine corrisponde al valore $x(n_1,n_2)$

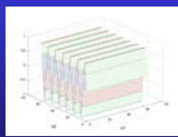
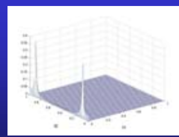



La stessa immagine può essere visualizzata nelle tre dimensioni in modo da evidenziare nella terza dimensione l'ampiezza di $x(n_1,n_2)$ utilizzando il comando mesh(.)

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

La trasformata discreta di Fourier bidimensionale, in ambiente Matlab,viene realizzata tramite il comando fft2(.).
Vediamo l'ampiezza della TDF per due immagini in cui la variazione avviene lungo direzioni ortogonali.

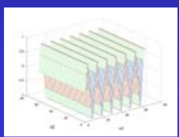
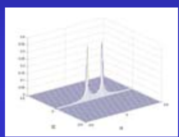

TDF 2D


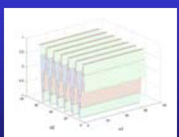
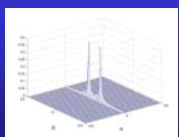

TDF 2D


Per la taratura degli assi dello spettro di ampiezza 2D è stata usata la frequenza normalizzata: tra 0 e 1 (in realtà non proprio 1 ma N-1/N)

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

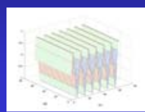
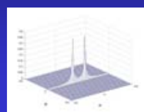
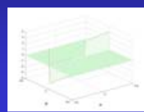
Con l'operazione di fftshift(.) è possibile visualizzare, analogamente al caso monodimensionale, l'intervallo frequenziale a cavallo dello zero.


TDF 2D


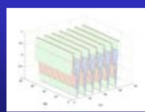
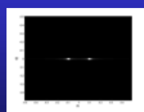
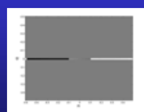

TDF 2D


## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

Di seguito viene mostrato anche lo spettro di fase….

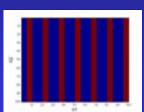
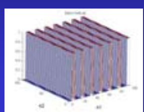
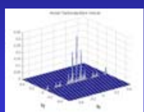

TDF 2D

Ampiezza

Fase

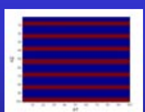
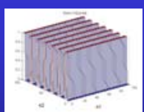
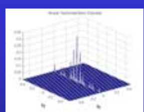
….la stessa informazione visualizzata come immagini intensità a livelli di grigio (in matlab usare imagesc(.) e poi colormap gray)


TDF 2D

Ampiezza

Fase

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

Vediamo l'ampiezza della trasformata di immagini costituite da barre orizzontali e verticali.

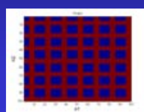
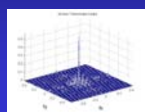
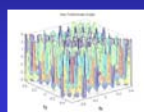


TDF 2D




TDF 2D


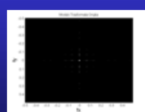
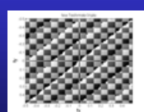
Si deve notare come il profilo lungo le direzioni parallele all'asse fx per le barre verticali e quelle all'asse fy per le barre orizzontali è analogo al profilo della trasformata discreta monodimensionale dell'onda rettangolare

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

Vediamo l'ampiezza e la fase della trasformata di un immagine costituita da una griglia.

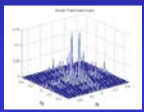

TDF 2D

Ampiezza

Fase

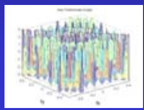
….la stessa informazione visualizzata come immagini intensità a livelli di grigio ….


Ampiezza

Fase

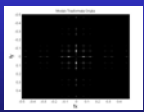
## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

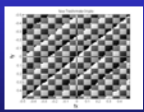
Per migliorare la visualizzazione dei picchi relativi alle armoniche è possibile toglier il valore medio all'immagine: questo porta all'eliminazione della componente continua fx=0, fy=0


Ampiezza


Fase

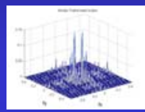
….la stessa informazione visualizzata come immagini intensità a livelli di grigio…

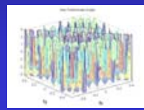

Ampiezza


Fase

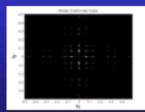

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

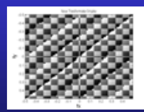
Per migliorare la visualizzazione dei picchi relativi alle armoniche è possibile toglier il valore medio all'immagine: questo porta all'eliminazione della componente continua fx=0, fy=0



Ampiezza


Fase

….la stessa informazione visualizzata come immagini intensità a livelli di grigio…


Ampiezza


Fase

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale

Vediamo la trasformata di un'immagine di una cultura cellulare ottenuta tramite un microscopio confocale. L'immagine originale è a colori e le cellule, preventivamente marcate, risultano verdi. Di seguito viene elaborata la componente verde estratta dall'immagine originale. L'immagine è un'immagine di intensità: valori chiari rappresentano una alta componente verde nell'immagine originale, valori scuri rappresentano una bassa componente verde nell'immagine di partenza.

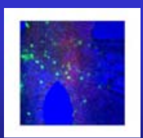
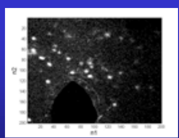
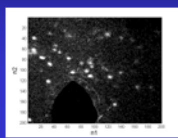


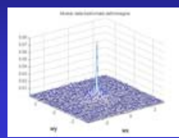
Immagine di partenza

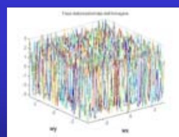

Componente verde

## Trasformata Discreta di Fourier Bidimensionale


Componente verde

TDF 2D





Lungo gli assi sono indicate le pulsazioni normalizzate $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ quindi comprese tra [$-\pi$,$\pi$] rad