Sequenze aperiodiche

$x[n]$, $y[n]$

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[n-k]$$ convoluzione lineare

Sequenze periodiche

convoluzione ciclica $x[n]$, $y[n]$ periodiche di periodo N

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, y[n-k]$$

Questa definizione deriva dal fatto che, per sequenze periodiche, si definisce

Pag. 102 Ver.

$$z[n] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{(2N+1)T} T \sum_{k=-N}^{+N} x[k]\, y[n-k]$$

visto che la convoluzione è periodica, essa si calcola nel periodo

$$z[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, y[n-k]$$

Una proprietà della TDF

$$\tilde{Z}[k] = \tilde{X}[k]\ \tilde{Y}[k]$$

$$\tilde{Z}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x[r]\, y[n-r]\ e^{-j\frac{2\pi n k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x[r] \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n-r]\, e^{-j\frac{2\pi n k}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x[r]\ \tilde{Y}[k]\, e^{-j\frac{2\pi r k}{N}} = \tilde{X}[k]\ \tilde{Y}[k]$$

Date due sequenze aperiodiche, finite di lunghezza N

$x[n]$ $y[n]$

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, y[n-k]$$

convoluzione lineare = convoluzione ciclica $* N_0$ $\tilde{z}[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} x[k]\, y[n-k]$

$$z[n] = \begin{cases} N_0 \tilde{z}[n] & n = 0, \dots, 2N-2 \\ 0 \text{ altrove} & \end{cases}$$

$N_0 \geq 2N-1$

$N_0 \geq P+Q-1$

Note per l'utilizzo fft matlab per convoluzione

doc fft

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi K n}{N}}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2\pi K n}{N}}$$

se vogliamo calcolare la convoluzione lineare tramite la ciclica

$$x[n] \xrightarrow{fft} X[K] \xrightarrow{TDF} \frac{1}{N} X[K]$$

$$y[n] \xrightarrow{fft} Y[K] \xrightarrow{TDF} \frac{1}{N} Y[K]$$

$$\frac{1}{N}\frac{1}{N} X[K]\, Y[K] \xrightarrow{ifft} \frac{1}{N^2} N z[n] \Rightarrow \text{moltiplico per } N^2$$

Per questo con fft non serve normalizzare per N

$\boxed{\text{N.B.}}$

Attenzione alla trasformata inversa