Note sull'utilizzo della TDF per il calcolo della convoluzione

Convoluzione lineare

Definita per sequenze aperiodiche $x[n]$ e $y[n]$ come

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

Convoluzione ciclica

$\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ periodiche di periodo N

$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k]\tilde{y}[n-k]$$

Dim.

$$\tilde{z}[n] \stackrel{\Delta}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} T \sum_{k=-N}^{+N} \tilde{x}[k]\tilde{y}[n-k]$$

la $\tilde{z}[n]$ è periodica di periodo N infatti

$$\tilde{z}[n+N] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} T \sum_{k=-N}^{+N} \tilde{x}[k]\tilde{y}[n+N-k] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} T \sum_{k=-N}^{+N} \tilde{x}[k]\tilde{y}[n-k]$$

visto che è periodica si calcola nel periodo

$$\tilde{z}[n] = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k]\tilde{y}[n-k] \qquad (1)$$

Proprietà della TDF

$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] \Leftrightarrow \tilde{Z}[k] = \tilde{X}[k]\tilde{Y}[K]$$

infatti, detta $\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] = \tfrac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r]\tilde{y}[n-r]$

$$\tilde{Z}[k] = \tfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{z}[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \tfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tfrac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r]\tilde{y}[n-r] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \tfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[r] \tfrac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{y}[n-r] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} =$$

$$= \tfrac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r]\tilde{Y}[k] e^{-j\frac{2\pi nr}{N}} = \tilde{Y}[k]\tfrac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] e^{-j\frac{2\pi nr}{N}} = \tilde{Y}[k]\tilde{X}[k]$$

Date due sequenze aperiodiche, finite di lunghezza *N*, $x[n]$ e $y[n]$

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k] \qquad (2)$$

Se le sequenze $x[n]$ e $y[n]$ vengono periodicizzate opportunamente è possibile calcolare la (2) tramite la (1).

In particolare il periodo deve essere tale per cui $N_0 \geq 2N-1$. In questo modo avremo:

$$\tilde{z}[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \tilde{x}[k]\tilde{y}[n-k]$$

$$z[n] = \begin{cases} N_0 \tilde{z}[n] & n = 0,1,\ldots,N_0-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$N_0 \geq 2N-1$$

se le sequenze sono di lunghezza P e Q, $N_0 \geq P+Q-1$

Note per l'utilizzo dell'algoritmo fft per realizzare la convoluzione in Matlab

L'algoritmo fft stima i seguenti coefficienti

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

tramite l'algoritmo ifft

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Per calcolare la convoluzione lineare tramite la ciclica si deve operare come segue

$$x[n] \xrightarrow{fft} X[k]$$

$$y[n] \xrightarrow{fft} Y[k]$$

dove l'algoritmo fft in entrambi i casi è applicato con uno zero padding pari a *P+Q-1*.

In seguito moltiplichiamo le TDF e ne calcoliamo l'antitrasformata con *ifft*

$$X[k]Y[k] \xrightarrow{ifft} z[n]$$