Capitolo 3

Sistemi LTI a Tempo Continuo

3.1 Proprietà di Linearità e Tempo Invarianza

3.1.1 Linearità

Si indichi con $T[.]$ la trasformazione ingresso-uscita, o funzione di trasferimento, di un sistema S_1, per cui l'uscita $y(t)$ del sistema ad un ingresso $x(t)$ si può indicare come $y(t) = T[x(t)]$. Il sistema S_1 si dice lineare se, dati due ingressi qualsiasi $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tali che

$$\begin{array}{l} y_1(t) = T[x_1(t)] \\ y_2(t) = T[x_2(t)] \end{array} \tag{3.1}$$

dato un terzo ingresso $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ con a e b costanti, vale la seguente proprietà

$$\begin{array}{l} y_3(t) = T[ax_1(t) + bx_2(t)] = \\ = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t) \end{array} \tag{3.2}$$

Questa proprietà permette si estende facilmente ad un segnale combinazione lineare, a mezzo di coefficienti costanti, di un numero arbitrario di segnali.

3.1.2 Tempo Invarianza

Si indichi con $T[.]$ la trasformazione ingresso-uscita di un sistema S_1, per cui l'uscita $y(t)$ del sistema ad un ingresso $x(t)$ si può indicare come $y(t) = T[x(t)]$. Il sistema S_1 si dice tempo invariante se, dato un ingresso qualsiasi $x(t)$ tale che $y(t) = T[x(t)]$, per qualsiasi t_0 costante, e dato il segnale ritardato $x_1(t) = x(t - t_0)$ si ha che

$$y_1(t) = T[x_1(t)] = T[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \tag{3.3}$$

Quindi l'uscita di un sistema tempo invariante ad un ingresso ritardato nel tempo è pari all'uscita al segnale non ritardato, ma ritardata a sua volta della stessa quantità dell'ingresso.

Un sistema per il quale sono valide entrambe le proprietà di linearità e tempo invarianza si dice lineare e tempo invariante o in forma compatta, LTI.

3.2 Risposta Impulsiva

Dato un sistema LTI si dice risposta impulsiva del sistema l'uscita del sistema quando in ingresso è presente la funzione impulsiva o delta di Dirac.

$$h\left(t\right) = T\left[\delta\left(t\right)\right] \tag{3.4}$$

Tale funzione è importante perché permette di conoscere l'uscita di un sistema LTI ad un qualsiasi ingresso. Infatti detto $x\left(t\right)$ il generico ingresso al sistema, questo può anche essere visto come

$$x\left(t\right) = x\left(t\right) \otimes \delta\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\tau\right)\delta\left(t-\tau\right)d\tau \tag{3.5}$$

dove con il simbolo $\otimes$ si indica l'operatore di convoluzione. L'equazione precedente permette di pensare al segnale $x\left(t\right)$, come la sommatoria di infinite delta di Dirac, $\delta\left(t-\tau\right)$ definite su un dominio continuo e centrate nel punto t, ognuna pesata per la quantità $x\left(\tau\right)$ (vedere Fig. 3.5).

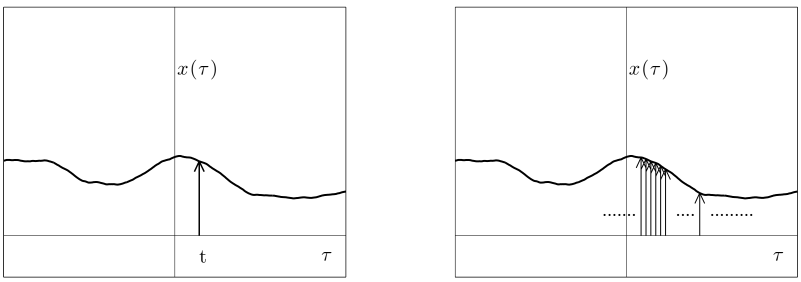

Figura 3.1: Rappresentazione di un segnale come somma di delta pesate

Vista la linearità e tempo invarianza del sistema e quindi dell'operatore $T\left[.\right]$ e la rappresentazione appena vista possiamo calcolare l'uscita ad un sistema LTI come segue

$$\begin{aligned} y(t) &= T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,T[\delta(t-\tau)]\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \\ &= x(t)\otimes h(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dalla equazione precedente segue che l'uscita di un sistema lineare e tempo invariante ad un qualsiasi ingresso $x(t)$ può essere calcolata conoscendo la risposta all'impulso o risposta impulsiva del sistema. Ricordiamo che per la proprietà communtativa dell'operatore convoluzione si ha che

$$\begin{aligned} x(t)\otimes h(t) &= h(t)\otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.3 Autofunzioni di un Sistema LTI

Si dice autofunzione di un sistema LTI, con funzione di trasferimento $T[.]$, una funzione $f(t)$ per la quale esiste un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ costante per cui vale la seguente proprietà

$$T[f(t)] = \lambda f(t) \text{ con } \lambda \text{ costante} \tag{3.8}$$

il numero λ prende il nome di autovalore del sistema.
Una particolare famiglia di autofunzioni dei sistemi LTI sono le funzioni del tipo $e^{j\omega t}$. Infatti:

$$\begin{aligned} y(t) &= T\left[e^{i\omega t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}d\tau = \end{aligned} \tag{3.9}$$

visto che l'integrale è in funzione della variabile τ, possiamo portare fuori dall'integrale la funzione $e^{j\omega t}$ ed ottenere

$$y(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{3.10}$$

l'integrale alla destra non dipende dal tempo e, fissato il valore di ω pari alla pulsazione dell'esponenziale complesso in ingresso, è una costante complessa $H(\omega)$ per cui si ha

$$y(t) = T\left[e^{i\omega t}\right] = e^{j\omega t}H(\omega) \tag{3.11}$$

Fissata ω, il numero $H(\omega)$ può essere espresso in modulo e fase come per cui abbiamo che l'uscita può essere scritta come

$$y(t) = e^{j\omega t}H(\omega) = |H(\omega)|\,e^{j\angle H(\omega)}e^{j\omega t} = |H(\omega)|\,e^{j(\omega t+\angle H(\omega))} \tag{3.12}$$

La funzione $e^{j\omega t}$, che può essere vista come un fasore rotante nel piano di Gauss, viene quindi modificata dal sistema in modulo e in fase. E' utile studiare il comportamento del sistema al variare di ω e di conseguenza conoscere modulo e fase di $H(\omega)$ per ogni possibile valore della pulsazione in ingresso. La funzione $H(\omega)$ che si ottiene al variare di ω, prende il nome di *risposta in frequenza del sistema*.

3.4 Risposta in Frequenza di un Sistema LTI

A partire dalle considerazioni precedenti possiamo giungere ad una prima definizione di risposta in frequenza. La risposta in frequenza di un sistema LTI in corrispondenza di una particolare pulsazione ω può essere trovata andando a calcolare il rapporto tra uscita ed ingresso nel tempo, qualora in ingresso sia presenta una funzione $e^{j\omega t}$. Quindi

$$H(\omega) = \frac{y(t)}{x(t)}\Big|_{x(t)=e^{j\omega t}} \tag{3.13}$$

al variare di ω sarà quindi possibile calcolare la risposta in frequenza per ogni pulsazione. Da questa definizione possiamo ricavare una definizione operativa per sistemi reali, per i quali si ha che

$$H(\omega) = H^*(\omega) \tag{3.14}$$

Vediamo infatti che se in ingresso ad un sistema reale è posto un segnale sinusoidale si ottiene

$$\begin{aligned}
&y(t) = T[x(t)] = T[cos(2\pi ft + \phi)] = T\left[\tfrac{e^{j(2\pi ft+\phi)}+e^{-j(2\pi ft+\phi)}}{2}\right] = \\
&= \tfrac{e^{j\phi}}{2}T\left[e^{j2\pi ft}\right] + \tfrac{e^{-j\phi}}{2}T\left[e^{-j2\pi ft}\right] = \tfrac{e^{j\phi}}{2}H(f)\,e^{j2\pi ft} + \tfrac{e^{-j\phi}}{2}H(-f)\,e^{-j2\pi ft} = \\
&= \tfrac{e^{j\phi}}{2}|H(f)|e^{j\angle H(f)}e^{j2\pi ft} + \tfrac{e^{-j\phi}}{2}|H(-f)|e^{j\angle H(-f)}e^{-j2\pi ft}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Visto che vale la proprietà in 3.14 allora possiamo scrivere l'equazione precedente come

$$\begin{aligned}
&\tfrac{e^{j\phi}}{2}|H(f)|e^{j\angle H(f)}e^{j2\pi ft} + \tfrac{e^{-j\phi}}{2}|H(f)|e^{-j\angle H(f)}e^{-j2\pi ft} = \\
&= \tfrac{e^{j(\phi+\angle H(f))}}{2}|H(f)|e^{j2\pi ft} + \tfrac{e^{-j(\phi+\angle H(f))}}{2}|H(f)|e^{-j2\pi ft} = \\
&= |H(f)|cos(2\pi ft + \phi + \angle H(f))
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Questo risultato mostra che la risposta in frequenza di un sistema ad una particolare frequenza f e quindi alla pulsazione ω, può essere determinata mandando in ingresso al sistema un'onda di tipo sinusoidale. Il rapporto tra l'ampiezza dell'oscillazione in uscita con l'ampiezza dell'oscillazione in ingresso fornisce il modulo della risposta in frequenza. La misura del ritardo temporale tra l'ingresso e l'uscita permette invece di stimare la fase della risposta in frequenza. Infatti il ritardo dell'oscillazione in uscita rispetto a quella in ingresso risulta

$$t_0 = \frac{\angle H(f)}{2\pi f} \tag{3.17}$$

Per ottenere la risposta in frequenza per tutte le frequenze di interesse, è necessario modificare la frequenza del segnale in ingresso.

Una seconda definizione discende dall'equazione 3.10. L'integrale a destra di tale equazione non è altro che la Trasformata Continua di Fourier della risposta impulsiva. La Trasformata Continua di Fourier della risposta impulsiva permette quindi di calcolare l'uscita di un sistema lineare e tempo invariante ad un esponenziale complesso al variare della sua pulsazione, quindi

$$H(\omega) = F_c(h(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt \tag{3.18}$$

L'ultima definizione discende dall'equazione 3.6. Dall'applicazione della TCF e del teorema della convoluzione si ha che

$$Y(\omega) = F_c(y(t)) = F_c(x(t) \otimes h(t)) = X(\omega)\, H(\omega) \tag{3.19}$$

dalla quale deriva che la risposta in frequenza di un sistema LTI può essere ricavata dal rapporto delle trasformate dell'uscita e dell'ingresso

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{3.20}$$

3.4.1 Esempi relativi a risposte in frequenza di sistemi LTI

Si consideri il sistema LTI la cui relazione ingresso uscita è data dalla trasformazione $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Uno dei modi possibili per stimare la risposta in frequenza può essere trovata utilizzando la definizione data dall'equazione 3.20.

Infatti trasformando entrambi i membri della relazione ingresso uscita si ottiene

$$Y(f) = j2\pi f X(f) \tag{3.21}$$

dalla quale si ricava che

$$H(f) = j2\pi f \tag{3.22}$$

Nelle figure seguenti sono rappresentati modulo e fase della risposta in frequenza del filtro derivatore.

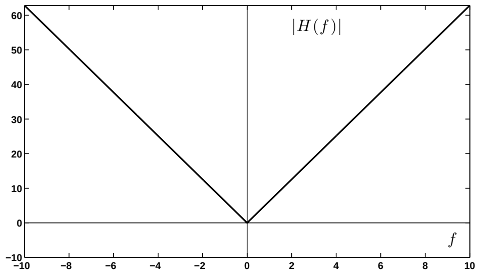

Figura 3.2: Modulo della Risposta in Frequenza

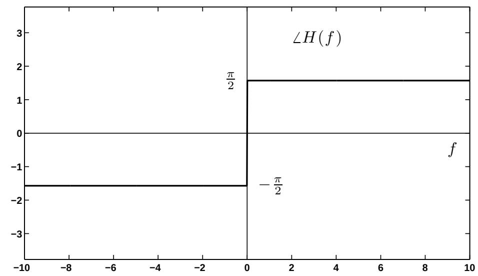

Figura 3.3: Fase della Risposta in Frequenza

Consideriamo in ingresso al sistema il segnale $x(t) = 2 + 2\cos(10\pi t)$. Anche se in questo semplice caso l'uscita può essere calcolata più facilmente nel dominio temporale, sfruttando la relazione ingresso-uscita del sistema, vediamo come operare nel dominio frequenziale sfruttando la definizione di risposta in frequenza. Per questa infatti si ha che

$$\begin{aligned}
&Y(f) = H(f)\,X(f) = j2\pi f X(f) = j2\pi f\,(2\delta(f) + \delta(f-5) + \delta(f+5)) = \\
&= j2\pi 0 2\delta(f) + j2\pi 5\delta(f-5) + j2\pi(-5)\,\delta(f+5) = \\
&= j10\pi\delta(f-5) - j10\pi\delta(f+5)
\end{aligned}$$

Descrivendo i coefficienti a moltiplicare le delta come modulo e fase e poi antitrasformando si ottiene

$$\begin{aligned}
&Y(f) = j10\pi\delta(f-5) - j10\pi\delta(f+5) = \\
&= 10\pi e^{\frac{\pi}{2}}\delta(f-5) + 10\pi e^{-\frac{\pi}{2}}\delta(f+5)
\end{aligned}$$

dalla quale si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= 10\pi e^{\frac{\pi}{2}} e^{j10\pi t} + 10\pi e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-j10\pi t} = \\ &= 20\pi \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -20\pi \sin(10\pi t) \end{aligned}$$

Nelle figure seguenti si mostrano modulo e fase dell'ingresso e dell'uscita al sistema. Si devono confrontare tali andamenti con quelli della risposta in frequenza. Si faccia attenzione al cambiamento nella scala delle ordinate dei due grafici.

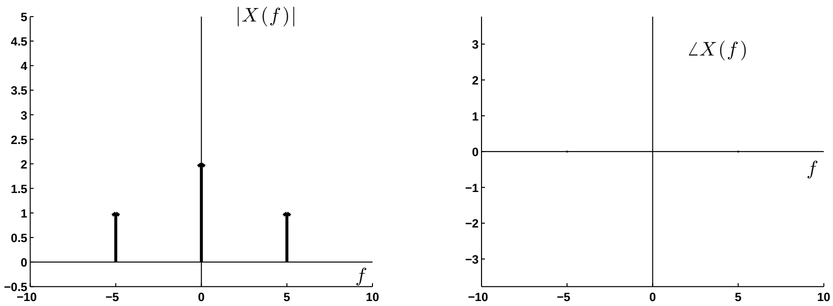

Figura 3.4: Modulo e fase del segnale in ingresso al derivatore

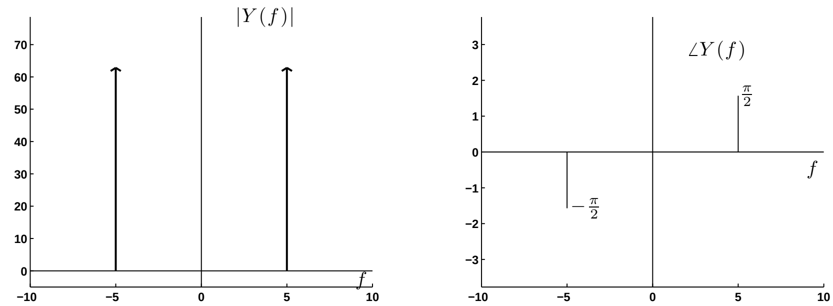

Figura 3.5: Modulo e fase del segnale in uscita dal derivatore

Bibliografia

[1] Luigi Landini (2005) *Fondamenti di Analisi di Segnali Biomedici* con Esercitazioni in Matlab, Plus Pisa University Press ed.

[2] Marco Luise, Giorgio M. Vitetta (2009) *Teoria dei Segnali* McGraw Hill ed.

[3] Lucio Verrazzani (1983) *Teoria dei Segnali. Segnali Determinati* ETS ed.