ANALISI DI FOURIER

Segnali tempo continui:

Segnali aperiodici

- Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier
- Derivazione intuitiva della TCF a partire dallo Sviluppo in Serie di Fourier
- Spettro di ampiezza e fase
- Esempio impulso Rettangolare
- Effetto del Ritardo Temporale

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Un segnale aperiodico si può rappresentare come la sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza infinitesima e di frequenza variabile con continuità tra -∞ e +∞

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

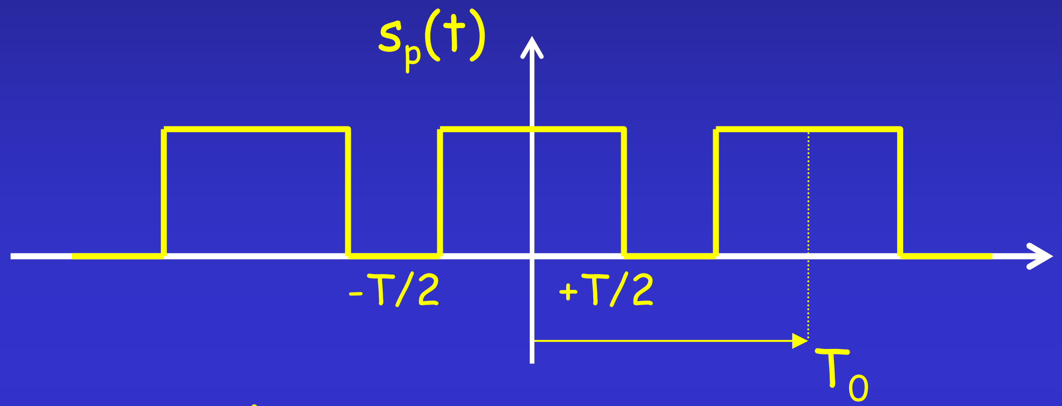
dove

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

È possibile arrivare a dimostrarlo in modo intuitivo andando a vedere come cambia lo spettro di n segnale periodico, quando il periodo viene fatto tendere all'infinito, ovvero viene reso aperiodico.

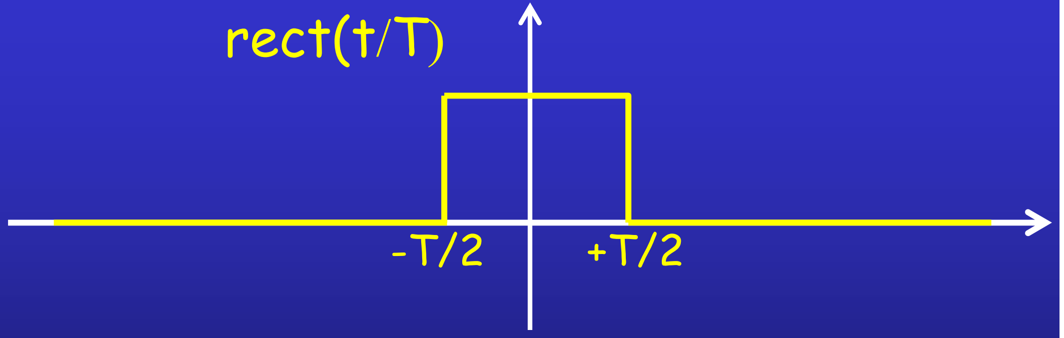
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Consideriamo un treno di impulsi $s_p(t)$



Dove $s_p(t)$ può essere scritto come

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

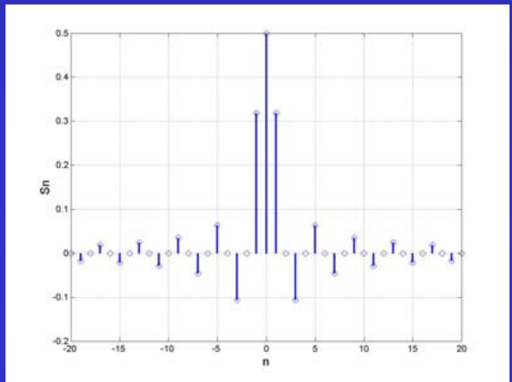


L'impulso centrato in zero può essere pensato come il limite per T_0 che tende a $+\infty$ di $s_p(t)$

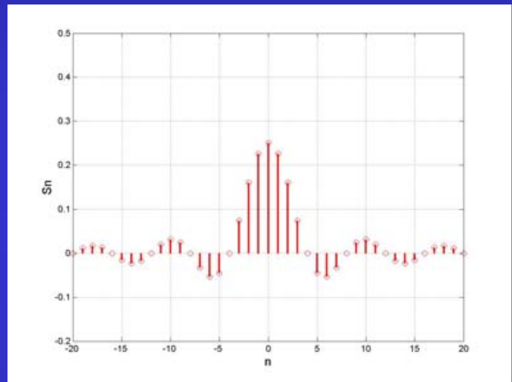
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Visualizziamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s_p(t)$ al variare di T_0 a parità di T.

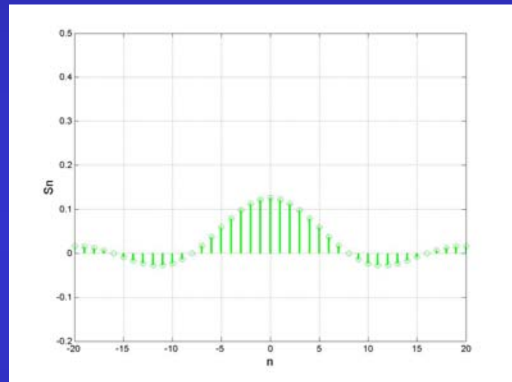
$T_0 = 2T$



$T_0 = 4T$



$T_0 = 8T$



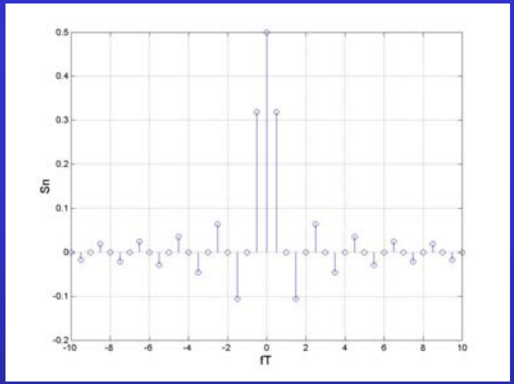
Si nota come l'ampiezza dei coefficienti diminuisce all'aumentare del periodo, come si evince dalla formula dei coefficienti

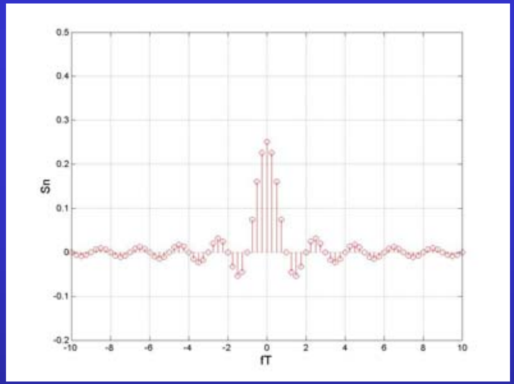
$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s_p(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt$$

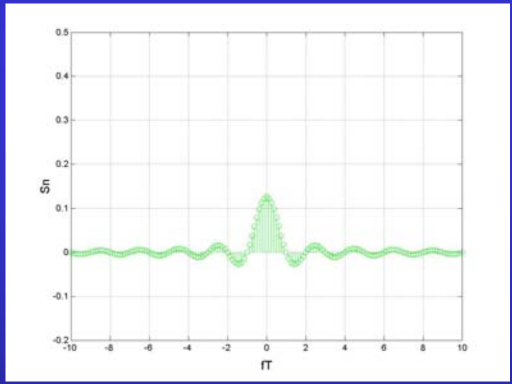
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

I coefficienti sono stati visualizzati rispetto a n: ad ogni n corrisponde la frequenza $f_n=n/T_0$ e quindi, visto che T_0 differisce in ciascun grafico, le frequenze per ogni n sono differenti $T_0=kT$ con $k=2,4,8$.

È possibile visualizzare lo spettro in funzione di $f=n/T_0=n/(kT)$. Inoltre, se vogliamo svincolarci dalla particolare scelta di T, possiamo usare la frequenza normalizzata fT.







Dal confronto degli spettri si vede come all'aumentare di T_0 le righe si infittiscano: la differenza tra due valori successivi nei quali sono definiti gli S_n è $\Delta f=(n+1)f_0-nf_0=f_0$

Nel limite $T_0 \to \infty$ questa differenza diventa infinitesima, df, ed è possibile definire una variabile continua $f=nf_0$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Il segnale $s_p(t)$ può essere scritto come $$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

È possibile dimostrare gli S_n si possono scrivere come $S_n=f_0 S(nf_0)$, dove S(f) è stata definita precedentemente, e che, al limite di $T_0 \to \infty$ gli S_n si possono scrivere come $S_n=S(f)df$

A questo punto la sommatoria dello sviluppo in serie di Fourier può essere interpretata come la somma di infinite funzioni oscillanti complesse date da

$$S(f)\,df\; e^{j2\pi ft}$$

Queste sono dei fasori di ampiezza infinitesima |S(f)|df e fase pari a $2\pi ft + \theta(f)$ con $\theta(f)$ fase di S(f)

Il processo al limite comporta la trasformazione della sommatoria nell'integrale, ottenendo la formula

$$\mathbf{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df}$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Con S(f) si indica la Trasformata Continua di Fourier (TCF) che identifica univocamente il segnale aperiodico s(t)

Se si scrive $S(f) = |S(f)|e^{j\theta(f)}$

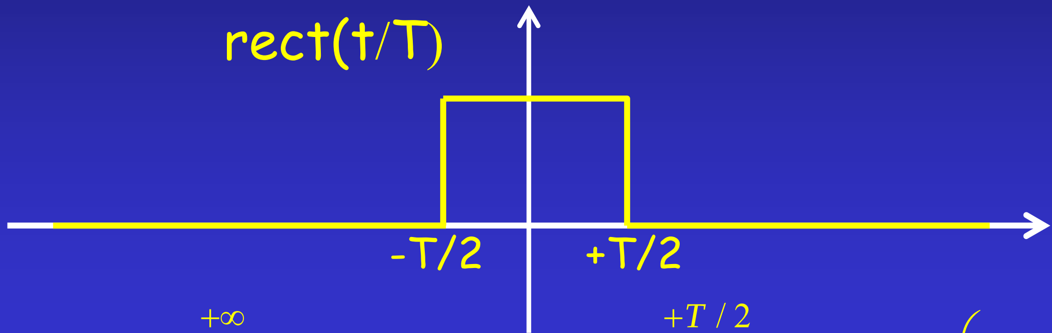
Possiamo definire lo spettro di ampiezza $S(f)$ e lo spettro di fase $\theta(f)$

È possibile usare anche la rappresentazione parte reale-parte immaginaria

$$S(f) = R(f) + jI(f)$$

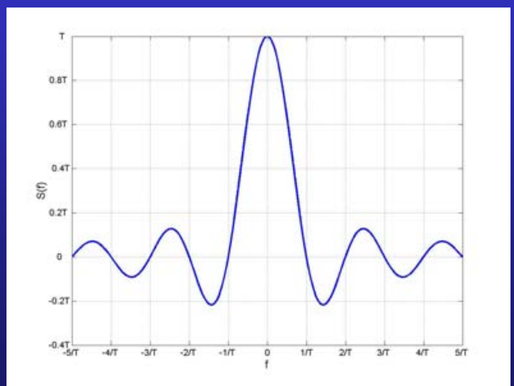
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Come esempio calcoliamo la TCF dell'impulso rettangolare



$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t/T) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \left(-\frac{1}{j2\pi f}\right)\left(e^{-j2\pi ft}\right)\Big|_{-T/2}^{+T/2} =$$

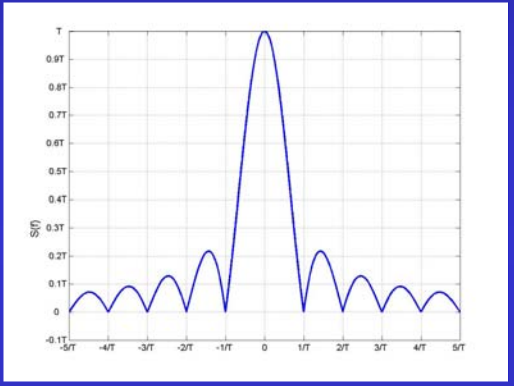
$$= \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T\,\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

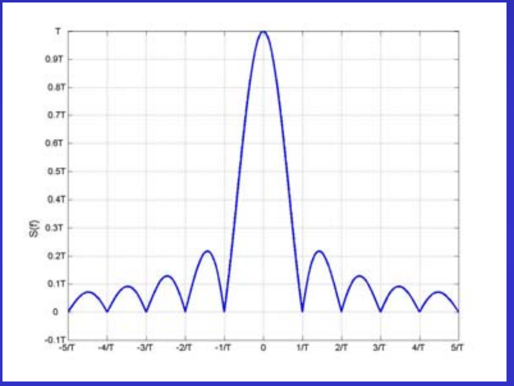


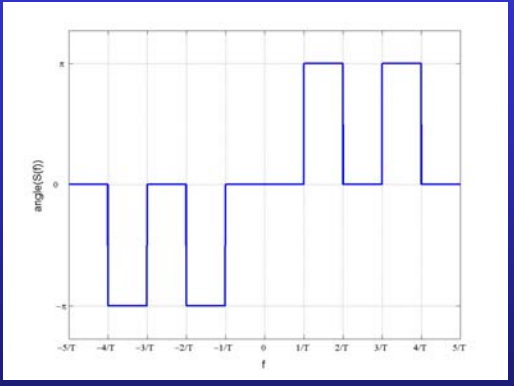
Essendo lo spettro reale è sufficiente un solo grafico per rappresentarlo.
Si deve notare che all'aumentare di T (impulso + lento), la sinc, e quindi il contenuto frequenziale si concentra alle basse frequenze. Sarà maggiore il contenuto alle alte frequenze al diminuire di T (impulso + veloce)

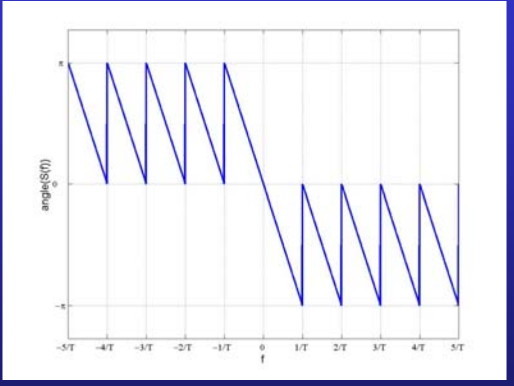
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Vediamo cosa succede allo spettro se ritardiamo l'impulso ad esempio di T/2. Nelle rappresentazioni seguenti vengono mostrati gli spettri di ampiezza e fase delle TCF dell'impulso rettangolare senza ritardo (sinistra) e con ritardo (destra)



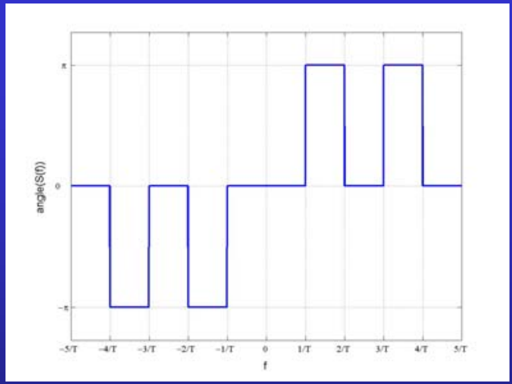


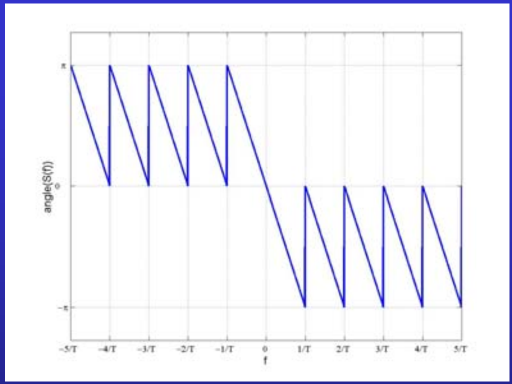




Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Nel caso del impulso centrato attorno all'origine, essendo la TCF reale, la fase può valere $-\pi$, π (numero negativo) o 0 (positivo). Il ritardo dello impulso di T/2 equivale ad aggiungere alla fase dello spettro precedente un termine lineare con f pari a $-2\pi fT/2$.
La visualizzazione "spezzata" della fase in questo caso è dovuta alla visualizzazione tra $[-\pi:\pi]$.





Si deve ricordare che, nel caso di segnali reali la fase risulta simmetrica rispetto all'origine