

ANALISI DI FOURIER

Segnali tempo continui:

- Segnali aperiodici
- Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier
 - Derivazione intuitiva della TCF a partire dallo Sviluppo in Serie di Fourier
 - Spettro di ampiezza e fase
 - Esempio impulso Rettangolare
 - Effetto del Ritardo Temporale

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Un segnale aperiodico si può rappresentare come la sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza infinitesima e di frequenza variabile con continuità tra $-\infty$ e $+\infty$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

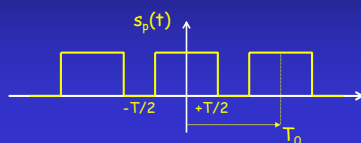
dove

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

È possibile arrivare a dimostrarlo in modo intuitivo andando a vedere come cambia lo spettro di un segnale periodico, quando il periodo viene fatto tendere all'infinito, ovvero viene reso aperiodico.

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Consideriamo un treno di impulsi $s_p(t)$



Dove $s_p(t)$ può essere scritto come

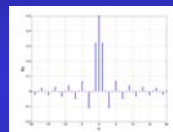
$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T}\right)$$

L'impulso centrato in zero può essere pensato come il limite per T_0 che tende a $+\infty$ di $s_p(t)$

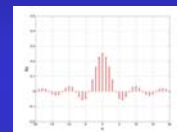
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Visualizziamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s_p(t)$ al variare di T_0 a parità di T .

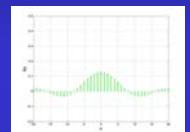
$T_0 = 2T$



$T_0 = 4T$



$T_0 = 8T$



Si nota come l'ampiezza dei coefficienti diminuisce all'aumentare del periodo, come si evince dalla formula dei coefficienti

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s_p(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

I coefficienti sono stati visualizzati rispetto a n : ad ogni n corrisponde la frequenza $f_n = n / T_0$ e quindi, visto che T_0 differisce in ciascun grafico, le frequenze per ogni n sono differenti $T_0 = kT$ con $k=2,4,8$.

È possibile visualizzare lo spettro in funzione di $f = n / T_0 = n / (kT)$. Inoltre, se vogliamo svincolarci dalla particolare scelta di T , possiamo usare la frequenza normalizzata fT .



Dal confronto degli spettri si vede come all'aumentare di T_0 le righe si infittiscono: la differenza tra due valori successivi nei quali sono definiti gli S_n è $\Delta f = (n+1)f_0 - nf_0 = f_0$. Nel limite $T_0 \rightarrow \infty$ questa differenza diventa infinitesima, df , ed è possibile definire una variabile continua $f = nf_0$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Il segnale $s_p(t)$ può essere scritto come $s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n f_0 t}$

È possibile dimostrare gli S_n si possono scrivere come $S_n = f_0 S(nf_0)$, dove $S(f)$ è stata definita precedentemente, e che, al limite di $T_0 \rightarrow \infty$ gli S_n si possono scrivere come $S_n = S(f) df$

A questo punto la sommatoria dello sviluppo in serie di Fourier può essere interpretata come la somma di infinite funzioni oscillanti complesse date da

$$S(f) df e^{j2\pi ft}$$

Queste sono dei fasori di ampiezza infinitesima $|S(f)|df$ e fase pari a $2\pi ft + \theta(f)$ con $\theta(f)$ fase di $S(f)$

Il processo al limite comporta la trasformazione della sommatoria nell'integrale, ottenendo la formula

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Con $S(f)$ si indica la Trasformata Continua di Fourier (TCF) che identifica univocamente il segnale aperiodico $s(t)$

Se si scrive $S(f) = |S(f)|e^{j\theta(f)}$

Possiamo definire lo spettro di ampiezza $S(f)$ e lo spettro di fase $\theta(f)$

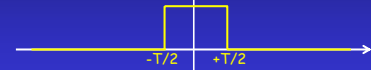
È possibile usare anche la rappresentazione parte reale-parte immaginaria

$$S(f) = R(f) + jt(f)$$

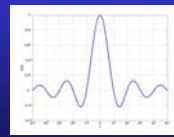
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Come esempio calcoliamo la TCF dell'impulso rettangolare

$rect(t/T)$



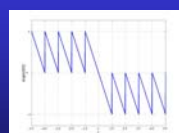
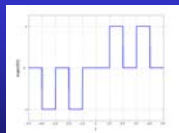
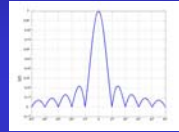
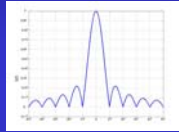
$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t/T)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \left(-\frac{1}{j2\pi f} \right) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T/2}^{+T/2} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(fT)$$



Essendo lo spettro reale è sufficiente un solo grafico per rappresentarlo. Si deve notare che all'aumentare di T (impulso + lento), la sinc, e quindi il contenuto frequenziale si concentra alle basse frequenze. Sarà maggiore il contenuto alle alte frequenze al diminuire di T (impulso + veloce)

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

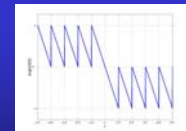
Vediamo cosa succede allo spettro se ritardiamo l'impulso ad esempio di $T/2$. Nelle rappresentazioni seguenti vengono mostrati gli spettri di ampiezza e fase delle TCF dell'impulso rettangolare senza ritardo (sinistra) e con ritardo (destra)



Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Nel caso del impulso centrato attorno all'origine, essendo la TCF reale, la fase può valere $-\pi$, π (numero negativo) o 0 (positivo). Il ritardo dell'impulso di $T/2$ equivale ad aggiungere alla fase dello spettro precedente un termine lineare con f pari a $-2\pi f T/2$.

La visualizzazione "spezzata" della fase in questo caso è dovuta alla visualizzazione tra $[-\pi; \pi]$.



Si deve ricordare che, nel caso di segnali reali la fase risulta simmetrica rispetto all'origine