ANALISI DI FOURIER

Segnali Tempo Discreti:

- Trasformata Discreta di Fourier
- Sequenza periodica
- Taratura degli assi frequenziali
- TDF di una sequenza finita
- Campionamento in Frequenza
- Algoritmi fft: esercitazioni Matlab®
  - Zero Padding
  - Troncamento
  - Analisi TF Sequenza
  - Effetto Ritardo temporale
  - Esempi
  - Calcolo convoluzione tra sequenze finite

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica: serie discreta di Fourier

Consideriamo una sequenza infinita e periodica di periodo N $x[nT]$ tale per cui $x[nT+NT]=x[nT]$

Per rappresentare tale sequenza si possono utilizzare N funzioni complesse del tipo

$$e_k[n] = e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Queste sono funzioni oscillanti, periodiche di periodo N/k

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica: serie discreta di Fourier

Cerchiamo di precisare il significato fisico delle oscillazioni.
Se la sequenza deriva da un campionamento di un segnale tempo continuo x(t)

$$e_k[n] = e^{\frac{j2\pi knT}{NT}}$$

Scrivendo in questo modo la funzione oscillante, si individua la frequenza di oscillazione

$$f_k = \frac{k}{NT}$$

Le frequenze sono multiple della frequenza fondamentale **1/NT**
Tali frequenze vengono dette “armoniche”

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica: serie discreta di Fourier

È possibile fare riferimento alla frequenza normalizzata rispetto al tempo di campionamento

$$f = \frac{k}{N}$$

o alla pulsazione normalizzata

$$\omega = \frac{2\pi k}{N}$$

Vista la periodicità delle funzioni oscillanti è possibile utilizzarne solo N, con k=0,1,…,N-1

Trasformata discreta di Fourier
di una sequenza periodica: serie discreta di Fourier

La trasformata discreta di Fourier (TDF) di una sequenza periodica, anche detta Serie Discreta di Fourier (SDF), si esprime con la seguente sommatoria

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Il fatto di avere un numero finito di funzioni deriva dal fatto che:

-In ogni periodo della sequenza è presente un numero finito di campioni

-Le funzioni sono periodiche

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica: serie discreta di Fourier

I coefficienti della TDF della sequenza periodica sono dati da

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

Questi coefficienti sono periodici di periodo N infatti

$$\tilde{X}(k+N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi(k+N)n}{N}} =$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}(k)$$

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica: serie discreta di Fourier

La periodicità dei coefficienti della SDF implica che sono sufficienti N campioni di X[k] per avere tutte le informazioni sul contenuto frequenziale della sequenza: in particolare è possibile scegliere l'intervallo [0,1,…,N-1] oppure un intervallo centrato attorno allo zero.

Nel caso di N pari, questa ultima scelta porta ad avere un intervallo asimmetrico.

Nella prossima slide verranno presentati i casi precedenti.

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica: serie discreta di Fourier

Frequenze delle funzioni oscillanti

$$f_k = \left[0, \frac{1}{NT}, \frac{2}{NT}, \dots, \frac{N-1}{NT}\right]$$

Intervallo "centrato" attorno allo zero

N dispari: $$f_k = \left[-\frac{(N-1)/2}{NT}, \dots, 0, \dots, \frac{(N-1)/2}{NT}\right]$$

N pari: $$f_k = \left[-\frac{N/2}{NT}, \dots, 0, \dots, \frac{N/2-1}{NT}\right]$$

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza finita

Il caso della TDF di una sequenza finita viene ricavato a partire dalla TDF della sequenza periodica ottenuta periodicizzando la sequenza finita stessa.
Vedremo che la TDF di una sequenza finita, passando attraverso la sua periodicizzazione, permette di ottenere i valori della TF della sequenza per un insieme finito di valori di f.

Detta x[n] la sequenza finita di lunghezza N, consideriamo la sequenza ottenuta dalla sua periodicizzazione, con periodo N:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

Per cui vale la seguente relazione:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza finita

Dall'ultima relazione si vede che è possibile ricavare la sequenza finita da quella periodica: ne consegue che, a partire dai coefficienti della TDF della sequenza periodica, è possibile ricavare i valori della sequenza finita.
Per analogia al legame esistente nel dominio temporale tra le due sequenze, si definisce il legame tra i coefficienti delle due trasformate: abbiamo visto che i coefficienti dello trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica, formano a loro volta una sequenza periodica in k. I coefficienti della TDF della sequenza finita si ottengono da questi ultimi secondo la seguente relazione

$$X(k) = \begin{cases} \tilde{X}(k) & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Con

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(k - nN)$$

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza finita

La TDF di una sequenza finita si ottiene quindi come

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \qquad 0 \le k \le N-1$$

L'operazione inversa si esprime come

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \qquad 0 \le n \le N-1$$

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza finita

La relazione intercorrente tra i coefficiente k-esimo della Trasformata Discreta di Fourier della sequenza periodicizzata $X(k)$ e la Trasformata di Fourier della sequenza originaria $\overline{X}(f)$, può essere espressa con la relazione di campionamento in frequenza per cui

$$X(k) = \frac{1}{N}\,\overline{X}\left(\frac{k}{NT}\right)$$

dove N è il numero di campioni della sequenza originaria. Vedremo più avanti un esempio.