ANALISI DI FOURIER

Segnali Tempo Discreti:

- Cenni alla Trasformata di Fourier di una sequenza
- Relazione con la TCF
- Condizione di Nyquist
- Effetto del troncamento del Segnale sulla TF

Trasformata di Fourier di una Sequenza

Consideriamo una sequenza x[n]: nel seguito considereremo la sequenza come derivante dal campionamento di un segnale tempo continuo, per cui x[n]=x(nT).
È possibile definire la Traformata di Fourier della sequenza come

$$\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n fT}$$

La trasformata è una funzione della variabile continua f.
È possibile esprimere la TF della sequenza in funzione della frequenza normalizzata F=fT.
La TF risulta periodica in f di periodo f=1/T infatti:

$$\overline{X}\left(f + \frac{1}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi n\left(f + \frac{1}{T}\right)T} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi n fT} e^{-j2\pi n} = \overline{X}(f)$$

Trasformata di Fourier di una Sequenza

L'operazione inversa permette di ricavare x[n] a partire dalla trasformata di Fourier

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{+1/2T} \overline{X}(f) e^{j 2\pi n fT} df$$

La relazione ricorda quella ottenuta per i segnali tempo continui, con la differenza che l'integrale è esteso ad un periodo della $\overline{X}(f)$.
Questo implica la sequenza può essere ricostruita utilizzando le frequenze comprese nell'intervallo finito [-1/2T:1/2T].
Questo fatto si può spiegare pensando alla periodicità della trasformata per cui le informazioni significative per la ricostruzione del segnale sono ottenibili analizzando un periodo della trasformata.

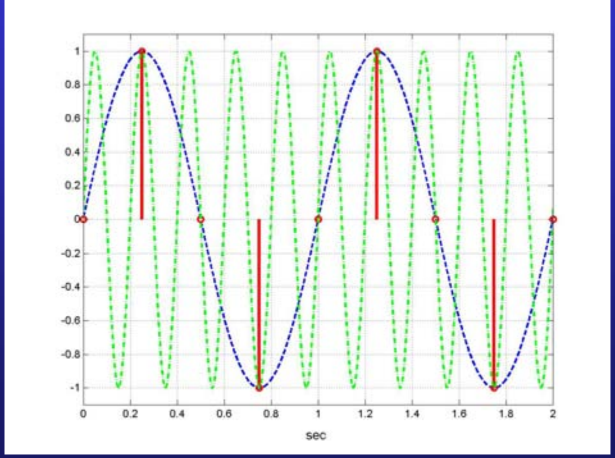
Se utilizziamo la frequenza normalizzata il periodo base si riduce all'intervallo di fT, [-1/2:1/2]

Trasformata di Fourier di una Sequenza

La periodicità di $\overline{X}(f)$ implica che due oscillazioni a frequenza f_1 e f_1+k/T, con f_1 generico, sono equivalenti

$$e^{j2\pi n\left(f_1+\frac{k}{T}\right)T} = e^{j2\pi n f_1 T} e^{j2\pi n k} = e^{j2\pi n f_1 T}$$

Come esempio scegliamo un tempo di campionamento pari a 4 Hz=1/T con T=0.25 sec. Con questo intervallo di campionamento l'intervallo base di frequenze necessarie e sufficienti per ricostruire la sequenza è [-2 Hz: 2 Hz]. Consideriamo una oscillazione sinusoidale a frequenza f_1=1Hz. Allora, dato T, questa oscillazione è indistinguibile da tutte quelle a frequenza 1 Hz+k*4Hz, con k intero: quindi 5 Hz, 9Hz etc.



La figura a sinistra mostra come le due oscillazioni a 1 Hz (linea blu) e 5 Hz (linea verde) diano origine alla stessa sequenza se campionate con T=0.25 sec

Trasformata di Fourier di una Sequenza

Supponendo che la sequenza x[n] derivi da un'operazione di campionamento di un segnale tempo continuo x(t), è possibile trovare una relazione che lega la Trasformata Continua di Fourier di x(t), $X(f)$ e la Trasformata di Fourier $\overline{X}(f)$ della sequenza x[n]. In particolare si ha

$$\overline{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

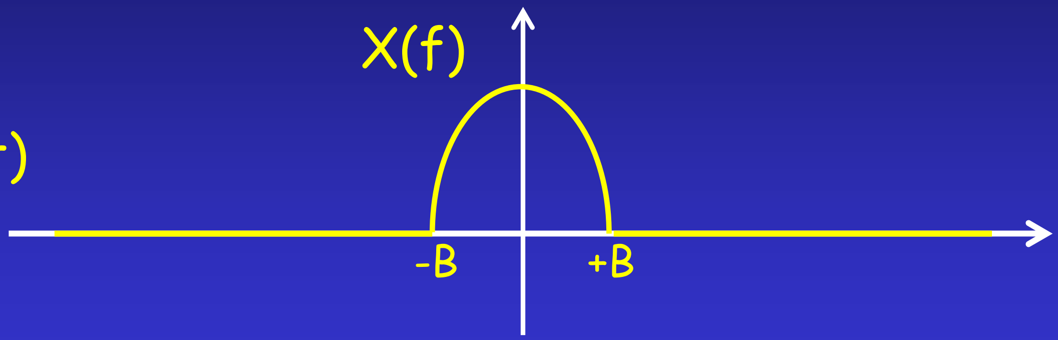
La trasformata di Fourier della sequenza è ottenuta periodicizzando, con periodo pari alla frequenza di campionamento 1/T la trasformata di Fourier del segnale tempo continuo.

Anche da questa considerazione si ricava la periodicità della $\overline{X}(f)$
Inoltre si evincono le condizioni per un corretto campionamento dei segnali limitati in banda: affinché sia possibile non avere perdita di informazione dal campionamento di un segnale limitato nella banda frequenziale B, è necessario che

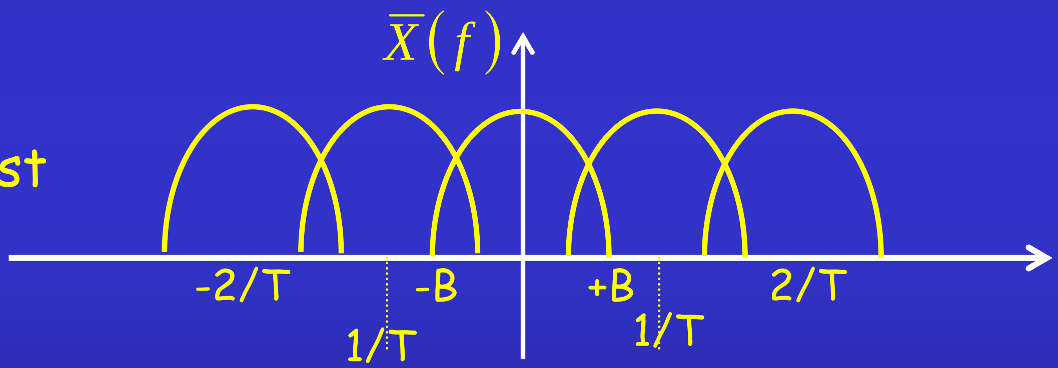
$$f_c = \frac{1}{T} \geq 2B \qquad \text{Condizione di Nyquist}$$

Trasformata di Fourier di una Sequenza

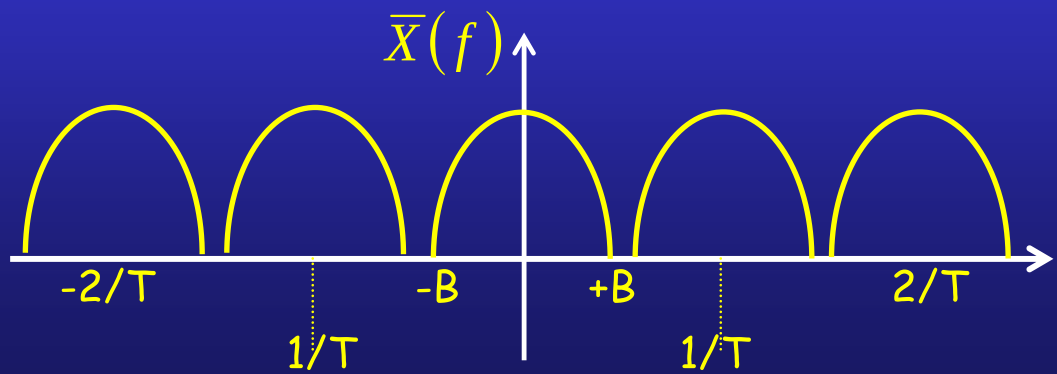
TCF del segnale x(t)



TF della sequenza
Condizione di Nyquist
non soddisfatta

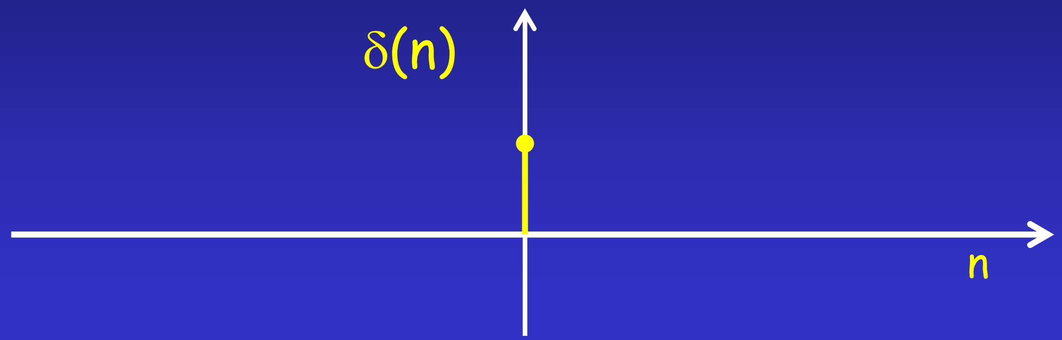


TF della sequenza
Condizione di Nyquist
soddisfatta



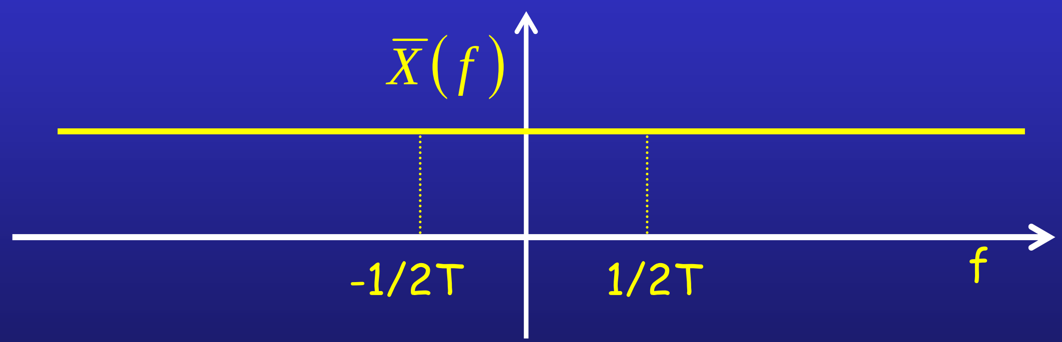
Trasformata di Fourier di una Sequenza

Esempi di TF di sequenze



$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n fT} =$$

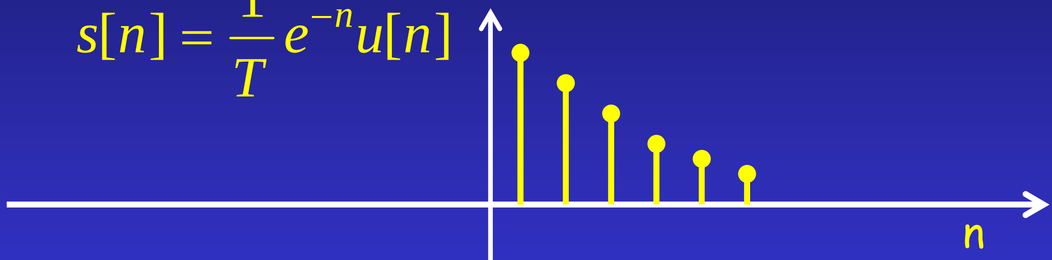
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi n fT} = 1$$



Trasformata di Fourier di una Sequenza

Esempi di TF di sequenze

$$s[n] = \frac{1}{T} e^{-n} u[n]$$

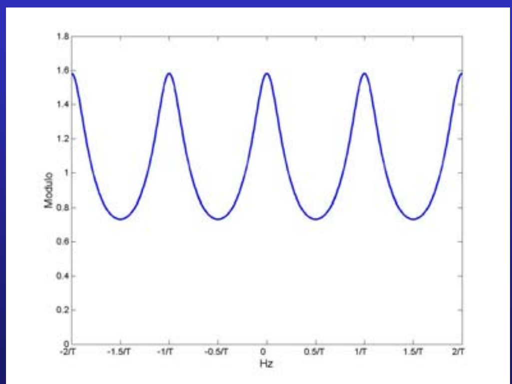


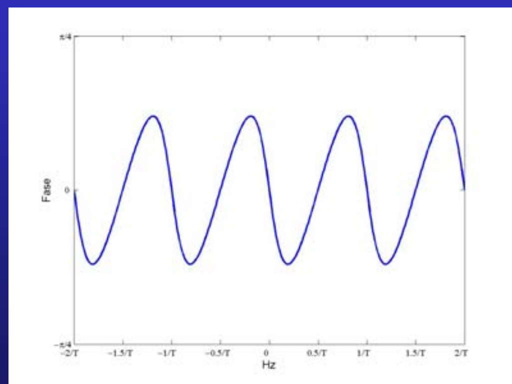
$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j 2\pi n fT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{-j 2\pi n fT} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+j 2\pi fT) n} = \frac{1}{1 - e^{-(1 + j 2\pi fT)}}$$

Visto che $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Modulo





Fase

Trasformata di Fourier di una Sequenza

Nella pratica si usano sequenze di durata finita: esse possono essere viste come l'osservazione, limitata temporalmente di una sequenza infinita x[n].
Questa operazione prende il nome di operazione di troncamento e matematicamente può essere descritta come il prodotto della sequenza x[n] per una finestra di osservazione w[n], nulla per gli n esterni all'intervallo di osservazione.

Per vedere come è sono legate le trasformate di x[n] e della sua versione troncata w[n]x[n] si deve ricorrere alla proprietà del prodotto nel tempo della TF, per cui

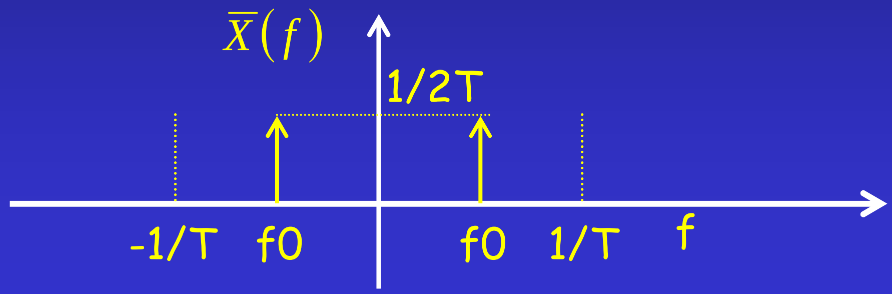
$$x[n] \overset{TF}{\Leftrightarrow} \overline{X}(f)$$

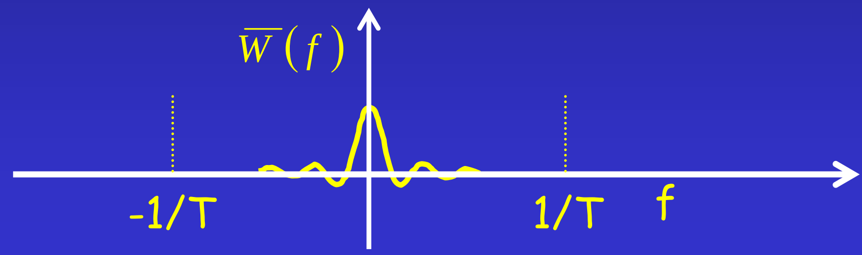
$$w[n] \overset{TF}{\Leftrightarrow} \overline{W}(f)$$

$$w[n]x[n] \overset{TF}{\Leftrightarrow} T \int_{-1/2T}^{+1/2T} \overline{W}(\alpha)\overline{X}(f-\alpha)d\alpha$$

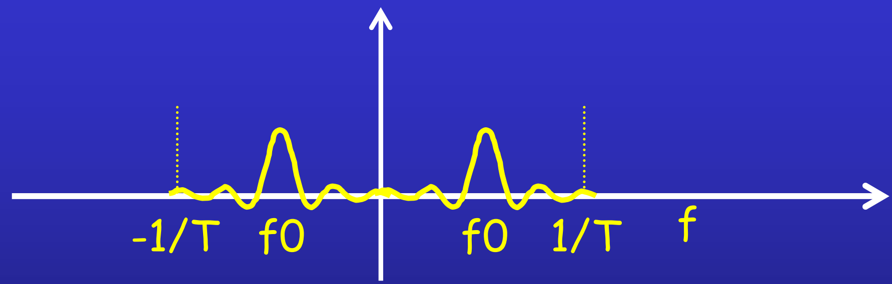
Trasformata di Fourier di una Sequenza

Consideriamo ad esempio la TF di $x[n]=\cos(2\pi f_o nT)$. Si trova che questa, nel periodo base, è data due delta di Dirac centrate in -f0 e f0.





Supponendo la finestra rettangolare, la sua TF risulterà simile ad una sinc(.),il risultato della convoluzione tra le delta e la TF della finestra è il seguente.



Visto che il contenuto frequenziale delle sinc diminuisce all'aumentare di T e si concentra attorno allo zero, la stima migliore della TF della sequenza di partenza si ottiene utilizzando una finestra di osservazione maggiore

Trasformata di Fourier di una Sequenza

In seguito considereremo la trasformata di Fourier di una sequenza finita.

Questa sarà ottenuta come TDF della sequenza ottenuta periodicizzando la sequenza originaria.

Questo ci permetterà di descriverne il contenuto frequenziale tramite un numero finito e discreto di coefficienti.