Effetto del troncamento

Consideriamo un sequenza infinita x’[n] e osserviamola per un numero N di campioni, ad esempio per n che va da 0 a N-1

La sequenza osservata è legata a x’[n] dalla seguente relazione nel tempo x[n]=x[n]’*(u[n]-u[n-N])

Mentre in frequenza, abbiamo che la TF di x[n] è legata a quella della sequenza originale tramite una convoluzione con una funzione simile ad una sinc

$$\bar{X}(f) = \bar{X}'(f) \otimes \frac{\sin(\pi f T N)}{\sin(\pi f T)} e^{-j\pi f T(N-1)}$$

Effetto del troncamento

Si deve notare che le precedenti sono le Trasformate di Fourier delle due sequenze

$$\bar{X}(f) = \bar{X}'(f) \otimes \frac{\sin(\pi f T N)}{\sin(\pi f T)} e^{-j\pi f T(N-1)}$$

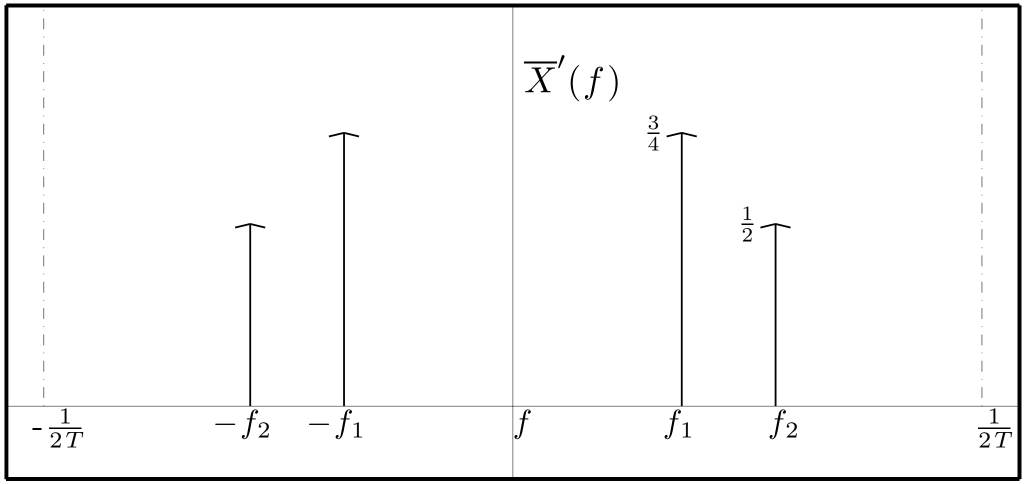
Nel momento in cui vogliamo stimare tali Trasformate utilizzando la TDF, avremmo che i campioni di quest'ultima saranno

$$X(k) = \frac{1}{N_0} \bar{X}\left(\frac{k}{N_0 T}\right)$$

Effetto del troncamento

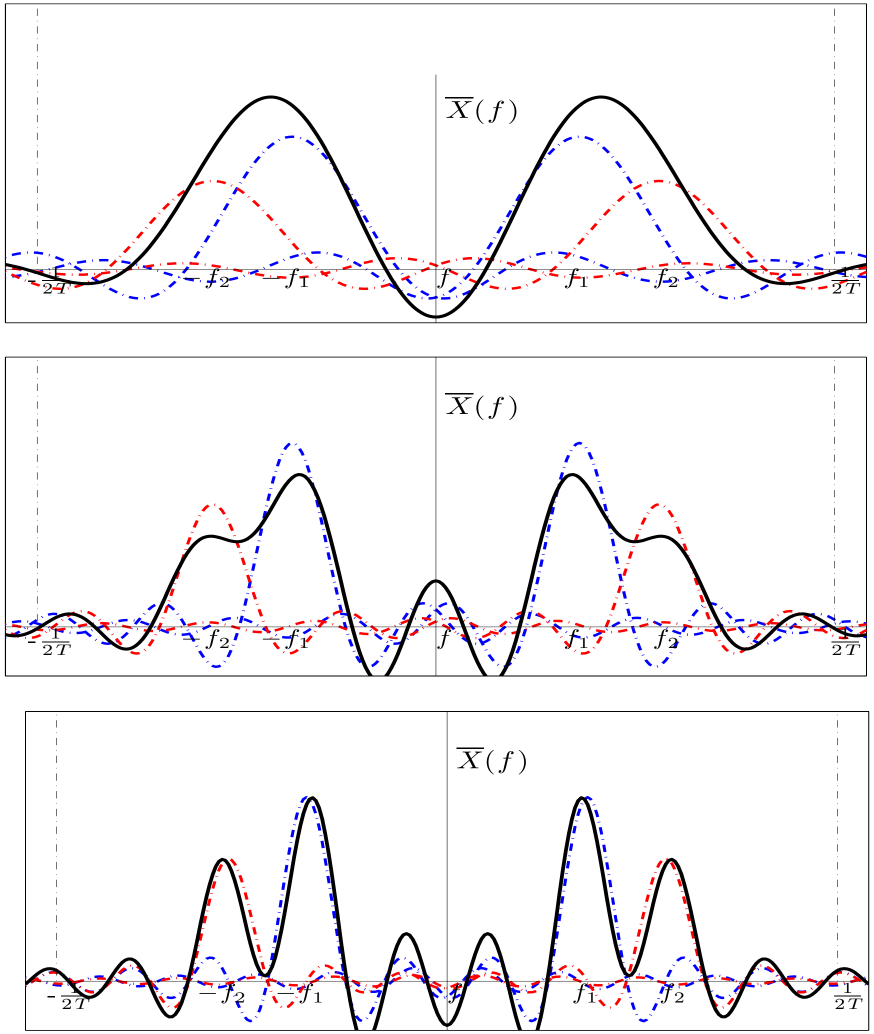
Vediamo un esempio di due funzioni cosinusoidali aventi frequenze rispettivamente f_1 e f_2

La TF della sequenza periodica è data dai 4 fasori che compongono le componenti



Effetto del troncamento

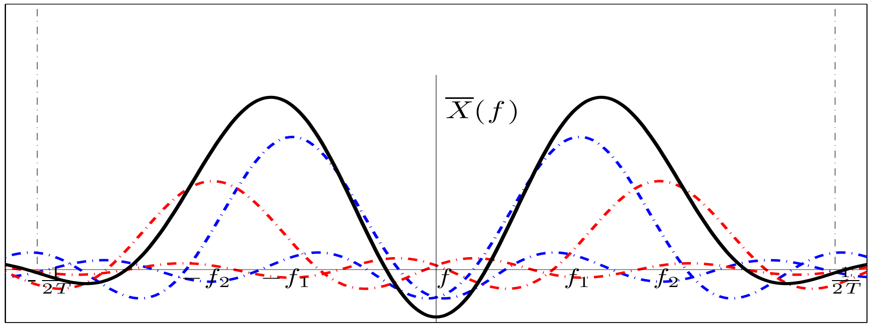
Si mostra cosa succede al variare dell'ampiezza temporale della finestra di osservazione alla TF, a partire da una finestra più piccola fino ad aumentarne la durata



Effetto del troncamento

Si fa notare come nel primo caso anche un aumento sensibile del numero di zeri, nell'operazione di zero padding, pur comportando un aumento del numero di campioni in frequenza, non permette di migliorare la risoluzione frequenziale, intesa non come distanza tra campioni in frequenza, ma come capacità di distinguere due componenti

Tale miglioramento si può ottenere solo aumentando la finestra di osservazione.



Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

La convoluzione tra due sequenze finite x[n]e h[n] può essere calcolata tramite la TDF utilizzando l'efficienza degli algoritmi fft.

Infatti detta $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$ la convoluzione lineare tra le

due sequenze e date P e Q le lunghezze rispettivamente di x[n]e y[n], si verifica che la convoluzione lineare coincide con un periodo della convoluzione circolare delle due sequenze, periodicizzate di N=P+Q-1.

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k]$$

Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

Date due sequenze periodiche di periodo N la convoluzione è definita come

$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k]\,\tilde{y}[n-k]$$

Tale convoluzione detta convoluzione ciclica utilizza solo i campioni di un periodo delle due sequenze

Se le sequenze x e y sono finite la convoluzione lineare è pari alla convoluzione ciclica moltiplicata per N. Infatti

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,y[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,y[n-k]$$

Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

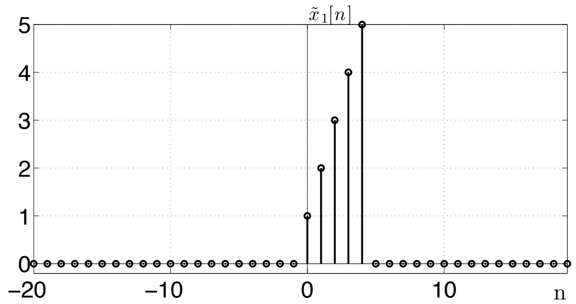
Affinché la convoluzione lineare e la ciclica diano lo stesso risultato bisogna fare in modo che la periodicizzazione non comporti una sovrapposizione delle repliche delle sequenze

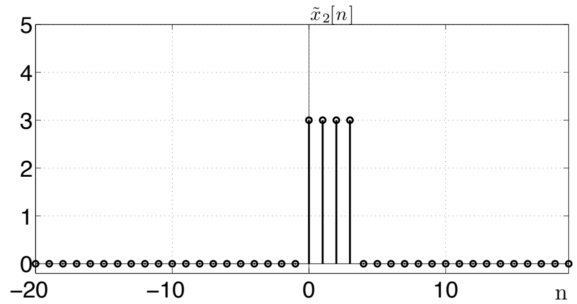
ovvero devono essere distanziate opportunamente

$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k]\tilde{y}[n-k] \qquad z[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k]$$

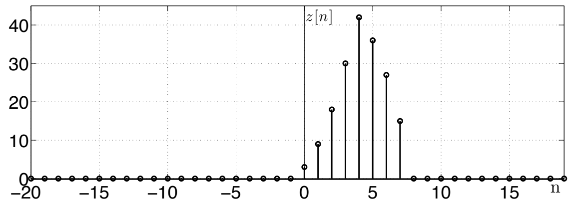
Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

Vediamo adesso un esempio di due sequenze lunghe 5 e 4 campioni rispettivamente





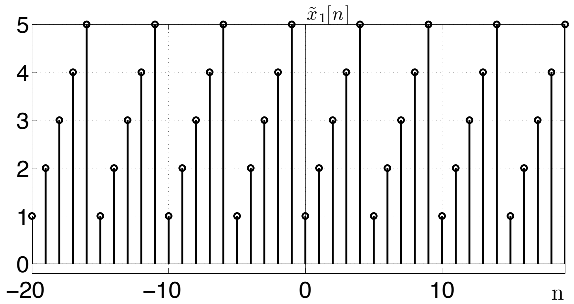
Il risultato della convoluzione lineare è lunga 8 campioni

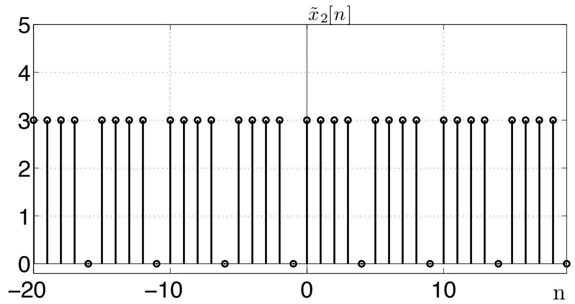


Tale lunghezza dovrà essere il periodo minimo per le sequenze periodicizzate

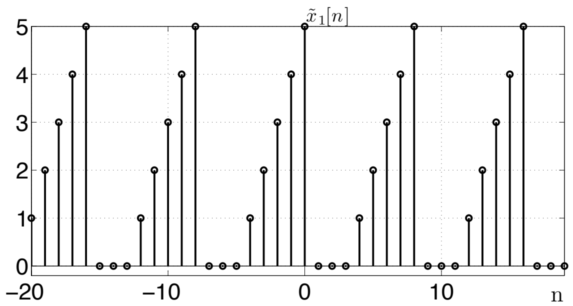
Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

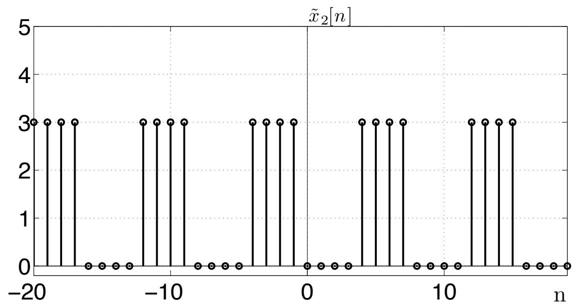
Di seguito si evidenziano due possibili periodicizzazioni, la prima essendo una scorretta (N=5) l'altra corretta (N=8)





Il risultato della convoluzione lineare è lunga 8 campioni





Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

Quindi se avessimo un modo per calcolare efficacemente la convoluzione circolare, potremmo sfruttarlo per calcolare la convoluzione lineare

Il modo è tramite la Trasformata Discreta di Fourier

In particolare si può sfruttare la proprietà della convoluzione che dice che

$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] \Leftrightarrow \tilde{Z}[k] = \tilde{X}[k]\tilde{Y}[K]$$

Il fatto di poter utilizzare un algoritmo che permette di stimare la TDF in modo efficiente, permette di avere un vantaggio computazionale nell'approccio nel dominio della frequenza invece che nel dominio del tempo

Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

I passi da seguire sono:

-calcolare le TDF, tramite fft, delle due sequenze periodicizzate

-moltiplicare le due TDF e antitrasformare il risultato

La periodicizzazione della sequenza è implicita quando si utilizza la TDF:
il periodo corretto viene indicato con l'operazione dello zero padding in modo da avere, per ogni sequenza, una TDF calcolata su N=P+Q-1 campioni

Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

Nell'esempio viene mostrata la convoluzione lineare tra due rect.
Nella figure in basso a destra il risultato della convoluzione circolare tramite fft senza zero padding, nella figura di sinistra con zero padding.