Dato il segnale continuo $s(t)$, reale o complesso, si definisce energia del segnale, nell'intervallo, $(-T/2, T/2)$ l'integrale

$$E_s(T) \triangleq \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$$

N.B.
Nel caso di segnale $s(t)$ reale la definizione assume significato fisico: se ad esempio $s(t)$ è la corrente applicata a un resistore di $1\,\Omega$, la $E_s(T)$ rappresenta l'energia dissipata nel resistore nel tempo T.

Il segnale $s(T)$ si dice a energia finita se $\exists$, finito e diverso da zero il limite

$$E_s = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \geq 0$$

N.B.
Per tutti i segnali fisici l'integrale è convergente.
L'utilizzo di segnali a energia infinita (ad.es. $s(t)=A$) è utile per avere dei modelli di segnale che approssimino i segnali reali durante il periodo di osservazione.

Si definisce potenza media del segnale $s(t)$, valutata nell'intervallo $[-T/2, T/2]$, la grandezza

$$P_s(T) \triangleq 1/T \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$$

Si dice che un segnale è a potenza media finita se $\exists$, finito e diverso da zero, il limite

$$P_s = \lim_{T\to\infty} 1/T \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

I segnali periodici rappresentano una classe di segnali a potenza media finita e ad energia infinita.

Infatti per $T = NT_0$ con $N \gg 1$ l'energia del segnale può scriversi come $$E_s(T) = \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \simeq N \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt$$

e tende all'infinito per $N \to \infty$

La potenza media si calcola come

$$P_s = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt .$$

N.B.

Un segnale a potenza finita ha energia infinita mentre se ha energia finita la sua potenza media è nulla.

Calcolo di energia e potenza di alcuni segnali

- Segnale esponenziale

$$s(t)=\begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{per } t\geq 0 \quad (\alpha>0) \\ 0 & \text{per } t<0 \end{cases}$$

$$E_s=\int_{-\infty}^{+\infty}|s(t)|^2\,dt=\int_0^{+\infty}A^2e^{-2\alpha t}\,dt=A^2\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)\cdot e^{-2\alpha t}\Big|_0^{\infty}=\frac{A^2}{2\alpha}<\infty$$

- $s(t)=\cos t+3\cos 2t\ ,\ -\infty<t<+\infty$

$$P_s=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(\cos t+3\cos 2t)^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(\cos^2 t+9\cos^2 2t+6\cos t\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}+\frac{9+9\cos 4t}{2}+\frac{6\cos t-6\sin^2 t\cos t}{2}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(5+\frac{\cos 2t+9\cos 4t+6\cos t}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-3\sin^2 t\cos t\,dt)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[5t\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\text{termini in coseno}\,dt-3\cdot\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=\frac{1}{2\pi}\cdot 10\pi$$

- $s(t)=e^{-\alpha t}\ (-\infty<t<\infty\ ;\ \alpha>0)$

$$E_s=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\alpha t}\,dt=\infty$$

$$P_s=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{-2\alpha t}\,dt=\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{2\alpha T}\cdot e^{-2\alpha t}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2}=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{\alpha T}-e^{-\alpha T}}{2\alpha T}=\infty$$

- $s(t)=A\cos\omega t\quad(A\in\mathbb{R})$

periodo $T_0=\frac{2\pi}{\omega}$

ha energia infinita

$$P_s=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}A^2\cos^2\omega t\,dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}A^2\cos^2\omega t\,dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}A^2\cos^2\omega t\,dt=\frac{A^2}{2}$$

- $s(t)=e^{j\omega t}$

periodo $T_0=\frac{2\pi}{\omega}$ $\qquad |e^{j\omega t}|=1\Rightarrow$

$$P_s=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}1\,dt=1$$

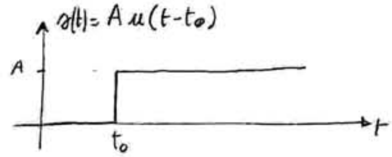
- $s(t) = A$ segnale costante

energia infinita $\quad E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\, dt = \infty$

$P_s = A^2$

- <u>segnale a gradino</u>

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{per } t \geq t_0 \\ 0 & \text{per } t < t_0 \end{cases}$$



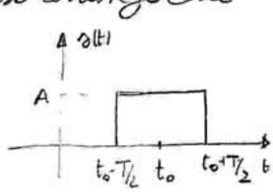
Con $u(t)$ si indica il segnale a gradino per $A=1 \quad t_0=0$

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

L'energia è infinita e la potenza è $P_s = \frac{A^2}{2}$

- Impulso rettangolare

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{per } |t-t_0| \leq T/2 \\ 0 & \text{per } |t-t_0| \geq T/2 \end{cases}$$



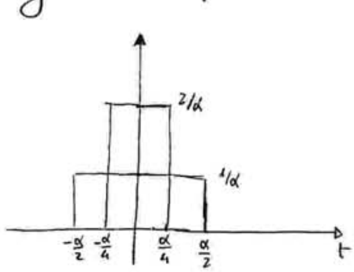
per $t_0 = 0$ e $A=1$ l'impulso rettangolare si indica con $G_T(t)$ o $\mathrm{rect}(t/T)$

$$G_T(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{per } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{per } |t| > T/2 \end{cases}$$

quindi $s(t) = A\, G_T(t-t_0) = A\, \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$

energia: $\quad E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\, dt = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A^2\, dt = A^2 T$

Per $A = 1/T$, per $T \to 0$, l'impulso rettangolare tende alla funzione impulsiva di Dirac $\delta(t-t_0)$



Breve introduzione ai fasori rotanti

Il segnale reale $\quad s_R(t) = A\cos(\omega t+\theta)$

si può ottenere come parte reale del segnale complesso

$$s(t) = A\, e^{j(\omega t+\theta)}$$

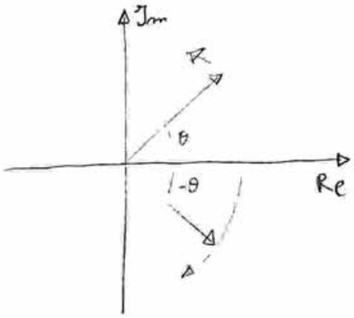
$s(t)$ viene detto "fasore rotante"

infatti dalla formula di Eulero

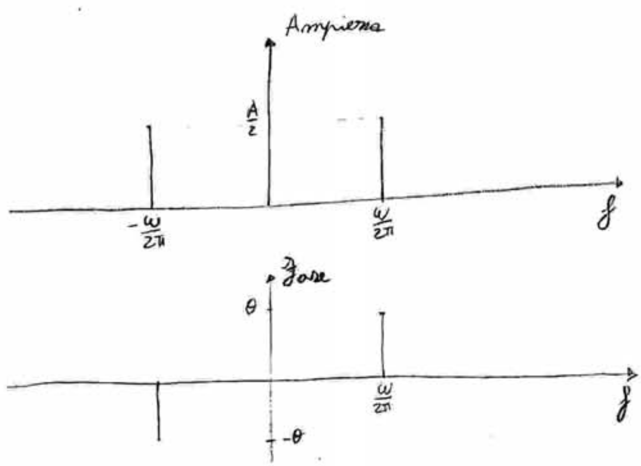
$$A\, e^{j(\omega t+\theta)} = A\cos(\omega t+\theta) + jA\sin(\omega t+\theta)$$

La parte reale di $s(t)$ si può ottenere come

$$s_R(t) = \frac{s(t)+s^*(t)}{2} = \frac{A}{2}\, e^{j(\omega t+\theta)} + \frac{A}{2}\, e^{-j(\omega t+\theta)}$$



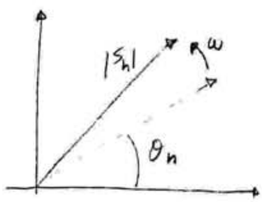
È possibile quindi rappresentare $s_R(t)$ come somma di due segnali complessi coniugati con pulsazione $\pm\omega$, fase iniziale $\pm\theta$ e ampiezza $A/2$



Serie di Fourier in forma esponenziale

Per tutti i segnali a potenza media finita, la serie di Fourier di $s(t)$, tale che $s(t)=s(t+T_0)\ \forall t$, è $\displaystyle s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n\, e^{j2\pi nt/T_0}$

Se si indica $S_n=|S_n|e^{j\theta_n}$ $s(t)$ è la somma di infiniti segnali esponenziali, rappresentabili nel piano complesso con vettori di ampiezza $|S_n|$ e fase iniziale θ_n ruotanti in senso antiorario con $\omega = 2\pi n/T_0$



$|S_n|$ è detto spettro di ampiezza

θ_n è detto spettro di fase

$$S_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\, e^{-j2\pi nt/T_0}\,dt$$

visto che sia $s(t)$ che $e^{-j2\pi nt/T_0}$ sono periodici, e quindi lo è anche il loro prodotto, per il calcolo di S_n agli estremi di integrazione può essere aggiunta una quantità arbitraria t_0

$$S_n=\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t)\, e^{-j2\pi nt/T_0}\,dt$$

Forma trigonometrica della SF

Per un segnale reale la $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n t/T_0}$

può essere riscritta utilizzando le funzioni seno e coseno.

Infatti $e^{j2\pi n t/T_0} = \cos 2\pi n t/T_0 + j \sin 2\pi n t/T_0$

inoltre, visto che S_n è complesso, $S_n = R_n + j I_n$

$$(1) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \cos 2\pi n t/T_0 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \sin 2\pi n t/T_0 + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sin 2\pi n t/T_0 + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos 2\pi n t/T_0$$

Se il segnale $s(t)$ è reale $\Rightarrow S_n^* = S_{-n}$ $\left(\text{N.B. } S_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0} dt \right)$

quindi
$$R_n = R_{-n}$$
$$I_n = -I_{-n}$$

Quindi nella (1) gli ultimi due termini sono nulli.

$$s(t) = R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [R_n \cos 2\pi n t/T_0 - I_n \sin 2\pi n t/T_0]$$

$$R_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cos 2\pi n t/T_0 \, dt$$

$$I_n = -\frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \sin 2\pi n t/T_0 \, dt$$

- Altro modo

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n t/T_0}$ i termini con n e $-n$ risultano complessi coniugati, se si raggruppano a coppie e se ne fa la somma

$$|S_n| e^{j(2\pi n t/T_0 + \theta_n)} + |S_{-n}| e^{-j(2\pi n t/T_0 - \theta_{-n})} =$$

(ma visto che $S_n^* = S_{-n} \Rightarrow |S_n| = |S_{-n}|$ e $\theta_n = -\theta_{-n}$) $\Rightarrow$

$$= 2|S_n| \cos(2\pi n t/T_0 + \theta_n)$$

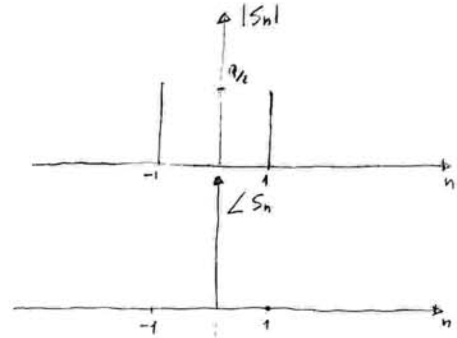
$$s(t) = S_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi n t/T_0 + \theta_n)$$

Sviluppo in serie di Fourier di alcuni segnali

1) $x(t) = a \cos 2\pi f_0 t$

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n t/T_0 + \theta_n)$$

N.B! $A_n = |S_n|$



$A_0 = 0$

$A_1 = \frac{a}{2} \qquad \theta_1 = 0 \qquad A_n = 0 \quad \forall n \neq 1$

$\downarrow$

$S_1 = \frac{a}{2} \qquad S_{-1} = \frac{a}{2}$

Si può calcolare anche a mano

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\cos 2\pi f_0 t \cdot e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt = \left(\text{visto che } \cos 2\pi f_0 t = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\, \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt = \frac{a}{2T_0}\int_{[T_0]} \left(e^{-j2\pi f_0 t(n+1)} + e^{-j2\pi f_0 t(n-1)}\right) dt =$$

$$= \frac{a}{2T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi(n-1)f_0 t}}{-j2\pi(n-1)f_0} + \frac{e^{-j2\pi(n+1)f_0 t}}{-j2\pi(n+1)f_0}\right]_0^{T_0} = \frac{a}{2T_0}\left(\frac{e^{-j2\pi(n-1)} - 1}{-j2\pi(n-1)f_0} + \frac{e^{-j2\pi(n+1)} - 1}{-j2\pi(n+1)f_0}\right) =$$

per $n \neq 1$ e $n \neq -1$

$e^{-j2\pi(n-1)}$, $e^{-j2\pi(n+1)}$ sono multipli di 2π $\Rightarrow$ valgono 1 $\Rightarrow S_n = 0 \ \forall n \neq \pm 1$

Per $n=1$ o $n=-1$ si ottiene un limite $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Riparto da

$$S_n = \frac{a}{2T_0}\int_{[T_0]} \left(e^{-j2\pi f_0 t(n+1)} + e^{-j2\pi f_0 t(n-1)}\right) dt$$

se $n = 1 \qquad S_1 = \frac{a}{2T_0}\int_{[T_0]} dt = \frac{a}{2}$ $\qquad$ idem per S_{-1}

- $s(t) = a \sin 2\pi f_0 t$.

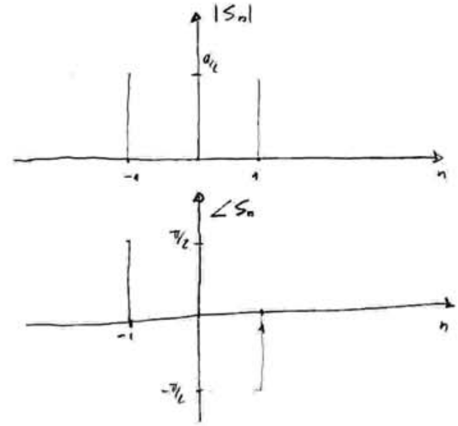
$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})$

$A_1 = \frac{a}{2} \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \qquad A_n = 0 \ \forall n \neq 1$

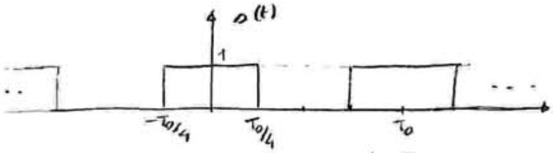
$\downarrow$

$|S_1| = \frac{a}{2} \qquad S_{-1} = \frac{a}{2} \qquad S_n = 0 \ \forall n \neq \pm 1$

$\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \qquad \theta_{-1} = \frac{\pi}{2}$



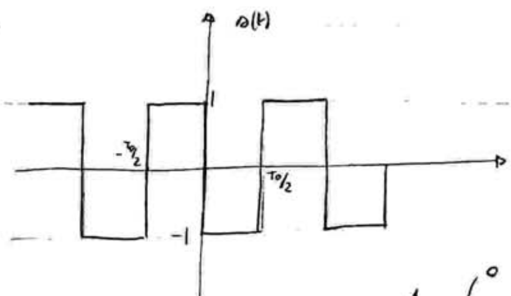
- $s(t)$, onda quadra



$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{\frac{3}{4}T_0} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{-j2\pi n t/T_0} dt =$$

$$= \begin{cases} 1/2 & n = 0 \\ \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi n t/T_0}}{-j2\pi n/T_0}\right]_{-T_0/4}^{T_0/4} \end{cases} = \begin{cases} 1/2, & n=0 \\ \frac{1}{2}\frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2}, & n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1/2 & n=0 \\ 0 & n = \text{pari} \\ \frac{-(-1)^K}{(2K-1)\pi} & n = 2K-1 \qquad K = 0, \pm1, \pm2 \dots \end{cases}$$

-



$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0} dt =$$

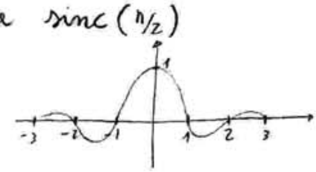
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0} dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{0} e^{-j2\pi n t/T_0} dt - \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} e^{j2\pi n t/T_0} dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } n = 0 \\ \frac{1}{T_0}\left(\frac{1 - e^{-j\pi n}}{-j\frac{2\pi n}{T_0}} - \frac{e^{+j\pi n} - 1}{j\,2\pi\frac{n}{T_0}}\right) = j\,\frac{1 - \cos\pi n}{\pi n} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } n = \text{pari} \\ j\frac{2}{n\pi}, & n = \text{dispari} \end{cases}$$

$\boxed{\text{N.B}}$ La funzione $\frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2}$ si può scrivere come $\text{sinc}(n/2)$

dove si indica con $\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$



Condizioni di simmetria

Il calcolo dei coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale o trigonometrica risulta semplificato nel caso in cui

- $s(t)$ è pari, $s(t) = s(-t) \Rightarrow S_{-n} = S_n$ (DIM. in fondo alla pagina)

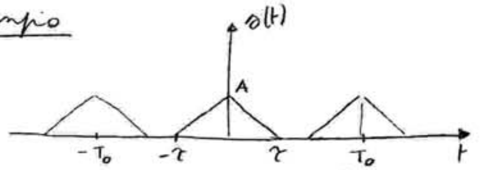
se il segnale è anche reale $S^*_n = S_{-n} \Rightarrow I_n = 0 \quad \theta_n = 0$

R_n sono pari perché $s(t)$ e $\cos 2\pi n t/T_0$ sono pari, quindi

$$R_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\cos(2\pi n t/T_0)\,dt$$

La serie di Fourier in forma trigonometrica contiene solo il termine costante e quelli in coseno

esempio



$I_n = 0$

per $n \neq 0$ $\quad R_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{\tau} A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cos 2\pi n t/T_0\,dt = \frac{2}{T_0}A\left[\frac{1}{2\pi n/T_0}\cdot \sin 2\pi n\frac{\tau}{T_0} - \int_0^{\tau}\frac{t}{\tau}\frac{d(\sin 2\pi n t/T_0)}{2\pi n/T_0}\right.$

$$= \frac{2}{T_0}A\left\{\frac{1}{2\pi n/T_0}\sin 2\pi n\frac{\tau}{T_0} - \left[\frac{t}{\tau}\,\frac{\sin 2\pi n t/T_0}{2\pi n/T_0}\right]_0^{\tau} + \int_0^{\tau}\frac{1}{\tau}\,\frac{\sin 2\pi n t/T_0}{2\pi n/T_0}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{2}{T_0}A\left\{\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{2\pi n/T_0}\cdot\left[-\frac{\cos 2\pi n t/T_0}{2\pi n/T_0}\right]_0^{\tau}\right\} = \frac{2A\tau}{T_0}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2\pi n\tau}{T_0}\right)^2}\cdot(1-\cos 2\pi n\tau/T_0) =$$

$$= \frac{A\tau}{T_0}\,\frac{\sin^2(\pi n\tau/T_0)}{(\pi n\tau/T_0)^2}$$

$$R_0 = \frac{2}{T_0}\int_0^{\tau} A(1-t/\tau)\,dt = \frac{A\tau}{T_0} \qquad \Rightarrow S_n = R_n = A(\tau/T_0)\,\frac{\sin^2(\pi n\tau/T_0)}{(\pi n\tau/T_0)^2}$$

DIM $\quad s(t)$ è pari $(s(t) = s(-t)) \Rightarrow S_{-n} = S_n$

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\,e^{-j2\pi n\frac{t}{T_0}}\,dt \Rightarrow S_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\,e^{j2\pi n\frac{t}{T_0}}\,dt =$$

effettuo il cambiamento di variabile $z = -t$

$$= -\frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{-T_0/2} s(z)\,e^{-j2\pi n\frac{z}{T_0}}\,dz = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(z)\,e^{-j2\pi n\frac{z}{T_0}}\,dz = S_n$$

$\boxed{\text{N.B}}$ $\quad \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

- $s(t)$ dispari $\qquad s(t) = -s(-t)$

$$S_n = -S_{-n}$$

Se il segnale è anche reale $\Rightarrow$ S_n sono immaginari puri e dispari $\Rightarrow R_n =$
Visto che il prodotto delle funzioni dispari $s(t)$ e $\sin 2\pi n t/T_0$ è pari

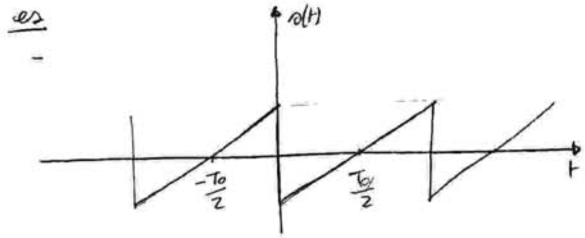
$$I_n = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\sin(2\pi n t/T_0)\,dt$$

$\Downarrow$

Il segnale in forma trigonometrica contiene solo i termini in seno

es

-

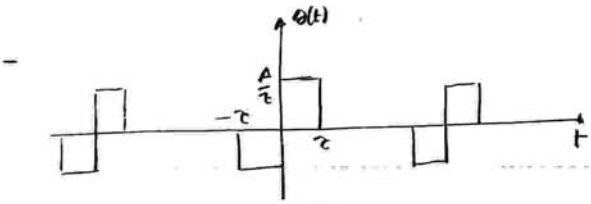


$$R_n = 0$$

$$I_n = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}(t - T_0/2)\sin(2\pi n t/T_0)\,dt = \frac{1}{2\pi n f_0}$$

$$S_n = j I_n = j\,\frac{1}{2\pi n f_0}$$

-

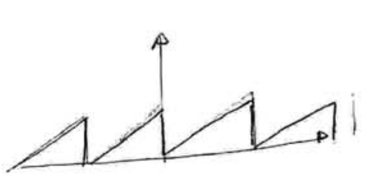


$s(t)$ dispari
$R_n = 0 \quad \forall n$

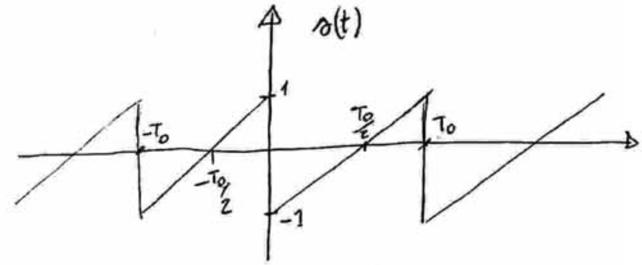
$$I_n = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\sin(2\pi n t/T_0)\,dt = -\frac{2}{T_0}\frac{A}{\tau}\int_0^{\tau}\sin 2\pi n t/T_0\,dt =$$

$$= -\frac{2A}{\tau}\,\frac{1-\cos 2\pi n\tau/T_0}{2\pi n} = -\frac{2A}{T_0}\,\frac{\sin^2(\pi n\tau/T_0)}{\pi n\tau/T_0}$$

- Alcuni segnali non dispari possono essere resi dispari sottraendo la continua. La serie contiene la continua e i termini in seno.



posso ricavare la SF togliendo la continua.



$s(t)$ dispari

$R_n = 0$

$$I_n = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\sin\left(2\pi n\frac{t}{T_0}\right)dt = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}\left(\frac{2}{T_0}t-1\right)\sin 2\pi n\frac{t}{T_0}\,dt =$$

$$= -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}\frac{2}{T_0}t\sin 2\pi n\frac{t}{T_0}\,dt + \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}\sin 2\pi n\frac{t}{T_0}\,dt =$$ (il primo integrale si risolve per parti)

$$= -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}\frac{2t}{T_0}\left(-\frac{d}{dt}\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)\cdot\frac{1}{2\pi\frac{n}{T_0}}\,dt + \frac{2}{T_0}\cdot\frac{1}{2\pi\frac{n}{T_0}}\left(-\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0/2} =$$

$$= -\frac{2}{T_0}\left[\left(2\frac{t}{T_0}\frac{1}{2\pi\frac{n}{T_0}}\left(-\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)\right)\Big|_0^{T_0/2} - \int_0^{T_0/2}\frac{2}{T_0}\frac{1}{2\pi\frac{n}{T_0}}\left(-\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)dt\right] + \frac{2}{T_0}\frac{1}{2\pi\frac{n}{T_0}}(1-\cos\pi n)$$

$$= -\frac{2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2\pi n}(-\cos\pi n) + \frac{1}{\pi n}\int_0^{T_0/2}\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\,dt\right] + \frac{1}{\pi n}(1-\cos\pi n) =$$

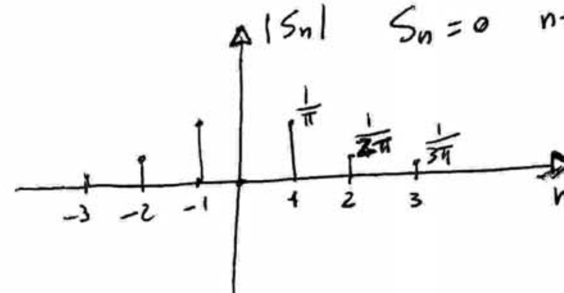
$$= \cancel{\frac{\cos\pi n}{\pi n}} + \frac{1}{\pi n}\,\frac{1}{2\pi\frac{n}{T_0}}\left(\sin 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0/2} + \frac{1}{\pi n}(1-\cancel{\cos\pi n}) =$$

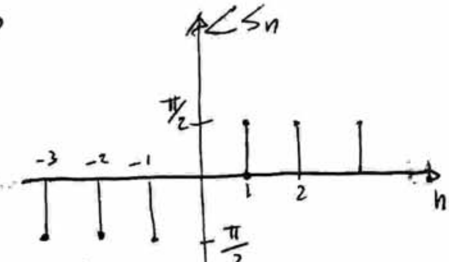
$$= \frac{1}{\pi n}\,\frac{1}{2\pi\frac{n}{T_0}}(\sin\pi n) + \frac{1}{\pi n}$$

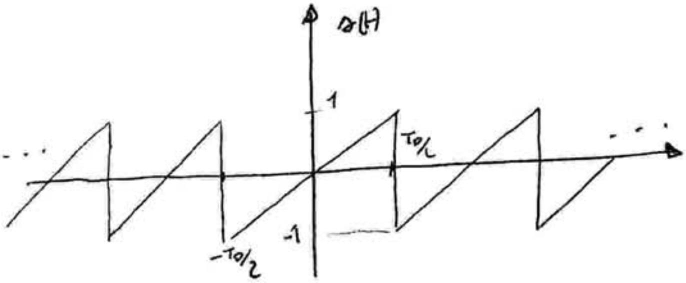
$\sin\pi n = 0\ \forall n \Rightarrow$

$$S_n = j\frac{1}{\pi n}\quad n\neq 0$$

$S_n = 0 \quad n = 0$







s(t) dispari $R_n = 0$

$$I_n = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\sin 2\pi n\frac{t}{T_0}\,dt = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}\frac{2t}{T_0}\sin 2\pi n\frac{t}{T_0}\,dt =$$

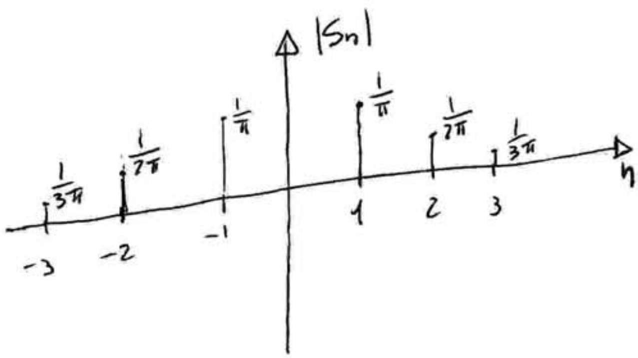
$$= -\frac{4}{T_0^2}\int_0^{T_0/2} t\cdot\frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}}\left(-\frac{d}{dt}\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)dt = -\frac{4}{T_0^2}\left[\left(-\frac{t}{\frac{2\pi n}{T_0}}\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)\Bigg|_0^{T_0/2} -\right.$$

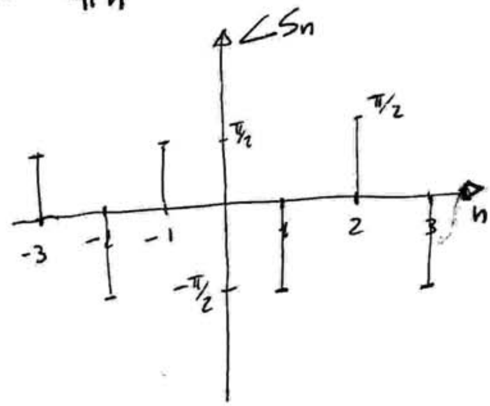
$$\left.- \int_0^{T_0/2}\frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}}\left(-\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)dt\right] = -\frac{4}{T_0^2}\left[-\frac{T_0^2}{4\pi n}\cdot\cos\pi n + \int_0^{T_0/2}\frac{1}{\frac{2\pi n}{T_0}}\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\,dt\right] =$$

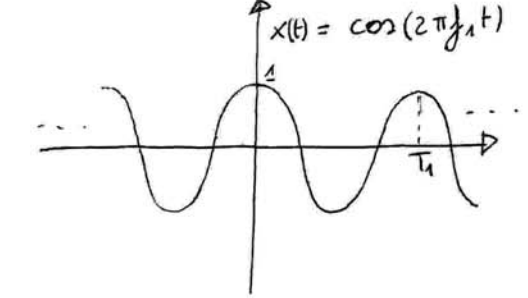
$$= \frac{\cos\pi n}{\pi n} - \frac{4}{T_0^2}\frac{T_0^2}{(4\pi n)^2}\left(\sin 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)\Bigg|_0^{T_0/2} =$$

$$= \frac{\cos\pi n}{\pi n} - \frac{1}{\pi n^2}(\sin\pi n) \qquad \sin\pi n = \emptyset \ \forall n$$

$$I_n = \frac{\cos\pi n}{\pi n} \qquad S_n = j\,\frac{\cos\pi n}{\pi n}$$

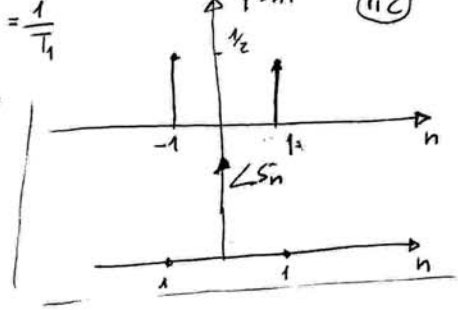


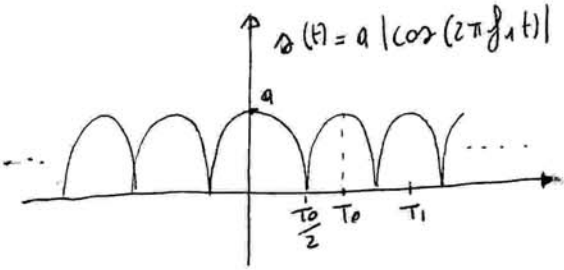




$f_1 = \frac{1}{T_1}$

$\xRightarrow{TSF}$





→ il periodo di $s(t)$ è dimezzato rispetto a quello di $x(t)$ quindi $s(t)$ è periodica di periodo $T_0 = \frac{T_1}{2}$

Lo spettro di $s(t)$ contiene le frequenze multiple di $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{2}{T_1} = 2f_1$

$s(t)$ è pari, quindi

$$I_n = 0$$
$$R_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\cos 2\pi n \frac{t}{T_0}\, dt$$

N.B. tra 0 e $T_0/2$ $\quad s(t) = a\cos 2\pi f_1 t$

$$R_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} a\cos 2\pi f_1 t \cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\, dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} a\cos\left(2\pi\frac{1}{2T_0}t\right)\cos\left(2\pi n\frac{t}{T_0}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} a\cos\left(\pi\frac{t}{T_0}\right)\cos 2\pi n\frac{t}{T_0}\, dt = \dots \text{ visto che } \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\dots = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} \frac{a}{2}\left[\cos\left(\pi\frac{t}{T_0} + 2\pi n\frac{t}{T_0}\right) + \cos\left(\pi\frac{t}{T_0} - 2\pi n\frac{t}{T_0}\right)\right] dt =$$

$$= \frac{a}{T_0}\int_0^{T_0/2}\left[\cos\left((1+2n)\pi\frac{t}{T_0}\right) + \cos\left((1-2n)\pi\frac{t}{T_0}\right)\right] dt = \frac{a}{T_0}\left[\frac{T_0}{\pi(1+2n)}\cdot\left(\sin(1+2n)\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0/2} +\right.$$

$$\left. + \frac{T_0}{(1-2n)\pi}\cdot\left(\sin(1-2n)\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0/2}\right] = \frac{a}{T_0}\left[\frac{T_0}{\pi(1+2n)}\sin(1+2n)\frac{\pi}{2} + \frac{T_0}{\pi(1-2n)}\sin(1-2n)\frac{\pi}{2}\right] =$$

$= \dots$ questa espressione si può semplificare notando che

$$\sin\frac{\pi}{2}(1+2n) = \sin\frac{\pi}{2}(1-2n) = (-1)^n \dots$$

$$\dots = \frac{a(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right] = \frac{2a(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{1-4n^2}\right]$$

- $s(t)$ è alternativo

$$s(t) = -s\left(t + T_0/2\right)$$

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\, e^{-j2\pi n\frac{t}{T_0}}\, dt = \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2} s(t)\, e^{-j2\pi n\frac{t}{T_0}}\, dt + \int_{-T_0/2}^{0} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0}\, dt\right] =$$

si pone $t' = t - T_0/2$ nel secondo integrale

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0}\, dt + \int_0^{T_0/2} s\left(t' + T_0/2\right)\, e^{-j\left(2\pi n\, t'/T_0 + n\pi\right)}\, dt$$

visto che $s\left(t' + T_0/2\right) = -s(t')$

e
$$e^{-j\left(2\pi n t'/T_0 + n\pi\right)} = \begin{cases} e^{-j2\pi n t'/T_0} & n \text{ pari} \\ -e^{-j2\pi n t'/T_0} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\, e^{-j2\pi n t/T_0}\, dt & n \text{ dispari} \end{cases}$$

se $s(t)$ è reale

R_n e I_n sono nulli per n pari

per n dispari

$$R_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\cos\left(2\pi n t/T_0\right) dt$$

$$I_n = -\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\sin\left(2\pi n t/T_0\right) dt$$