Trasformata discreta di Fourier

Verazzani TRASF. FINITA DI FOURIER
Lett. Anglosassone Discrete Fourier Transform
DFT

Si utilizza uno strumento per sequenze periodiche e poi si estende a sequenze aperiodiche.

La rappresentazione della sequenza periodica in serie di Fourier corrisponde alla TDF della sequenza finita.

Vantaggi computazionali (calcolo trasformata e convoluzione)

Sequenza periodica

$$x[n] = x[n+N_0] \quad \forall n$$

$\hat{X}_K$ Serie discreta di Fourier
DFS: discrete Fourier series

Analogia t.c.

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X_K e^{j\frac{2\pi K t}{T_0}}$$

$$X_K = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi K t}{T_0}} dt$$

T.D.

$$x[n] = \sum_{K=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi K n}{N}}$$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi K n}{N}}$$

Per rappresentare $x[n]$ servono solo un numero finito di valori

Questo perchè:

1) in un periodo ci sono solo un numero finito di campioni
2) la base è periodica infatti

$$e^{j\frac{2\pi K n}{N}} \text{ è periodico di periodo } N/K$$

$$e^{j\frac{2\pi K}{N}\left(n+h\frac{N}{K}\right)} = e^{j\frac{2\pi K n}{N}} e^{j2\pi h} \qquad \text{con } h \in \mathbb{N}$$

Come nel caso t.c. la trasformata si esprime in funzione di oscillazioni periodiche multiple della frequenza fondamentale $\frac{1}{NT}$

$$f_K = \frac{K}{NT} \qquad \text{normalizzando rispetto a } T \qquad F_K = \frac{K}{N}$$

vista la periodicità è sufficiente stimare $0, 1, \ldots, N-1$

Se si centra rispetto allo zero: N pari $\quad -\frac{N}{2}, \ldots, 0, \ldots, \frac{N}{2}-1$

N dispari $\quad -\frac{(N-1)}{2}, \ldots, 0, \ldots, \frac{(N-1)}{2}$

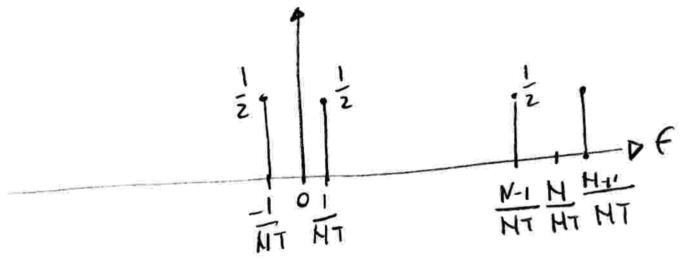
Lezione 14/05/07

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n T}{NT}\right)$$

1) $x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi n T}{NT}} + e^{-j\frac{2\pi n T}{NT}}\right)$ dal confronto $x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{X}_k e^{j\frac{2\pi k n}{N}}$

$K=1 \quad \hat{X}[1] = \frac{1}{2} \qquad f_1 = \frac{K}{NT} = \frac{1}{NT}$

$K=-1 \quad \hat{X}[-1] = \frac{1}{2} \qquad f_{-1} = -\frac{1}{NT} \qquad \equiv f_{-1+N} = f_{N-1}$



Attenzione alla periodicità del segnale campionato

Affinché un segnale periodico t.c. dia una sequenza periodica la freq. di campionamento e la freq. del segnale devono stare in rapporto razionale $\quad N_0 T = m T_0 \quad T_0$ periodo $s(t) \quad m T_0$ (o $N_0 T$) periodo di $s[n]$

$\cos\left(2\pi \frac{t}{8}\right) \quad f_0 = \frac{1}{8} \qquad$ con $T=1 \qquad N_0 T = m T_0 \qquad N_0 1 = m 8$

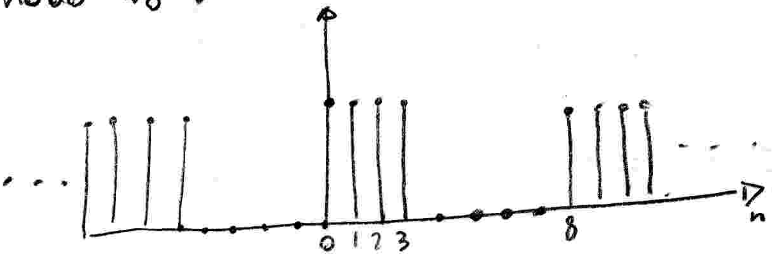
m minimo 1 con N_0 8

$\cos\left(2\pi \frac{3}{2}\frac{t}{8}\right) \quad f_0 = \frac{3}{16} \qquad$ con $T=1 \qquad N_0 T = m T_0 \qquad N_0 1 = m\frac{16}{3} \qquad N_0 = 16$, $m = 3$

Lezione 14/5/07

$x[n]$ periodica di periodo $N_0=8$

$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 3\\ 0 & 4\le n\le 7\end{cases}$$



$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]\,e^{-j2\pi\frac{kn}{N_0}}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{3}e^{-j2\pi\frac{kn}{8}}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{3}\left(e^{-j\frac{\pi k}{4}}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}a^n=\begin{cases}\frac{1-a^N}{1-a} & a\neq 1\\ N & a=1\end{cases}$$

$$\tilde{X}[k]=\begin{cases}1/2 & k=0\\ 1/8\,\frac{1-e^{-jk\pi}}{1-e^{-j\frac{k\pi}{4}}} & k\neq 0\end{cases}=\begin{cases}1/2 & k=0\\ \frac{1}{8}\,\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}}}{e^{-j\frac{k\pi}{8}}}\,\frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/8)}=\frac{1}{8}\,e^{-j\frac{3k\pi}{8}}\,\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\sin\frac{k\pi}{8}} & k\neq 0\end{cases}$$

$\tilde{X}[k]=$ 0,5   0,125 −0,3018j   0   0,125 − 0,0518j   0   0,125 + 0,0518j   0   0,125 + 0,3018j

$|\tilde{X}[k]|=$ 0,5   0,3266   0   0,1353   0   0,1353   0   0,3266

$\angle\tilde{X}[k]=$ 0   −1,1781   0   −0,39   0   0,39   0   1,1781

Consideriamo una sequenza aperiodica finita

$x[n]$

Possiamo farne la TF otterremo una funzione periodica e definita nell'intervallo $0, f_c$ o $0, 1/T$

Potremmo invece sfruttare algoritmi e strumenti della TDF

Operiamo quindi una periodicizzazione

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

$\boxed{NB}$ è possibile ricavare $x[n]$ da $\tilde{x}[n]$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dati i coefficienti della serie discreta di Fourier

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

per i quali

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_k e^{j\frac{2\pi k n}{N}}$$

si definiscono i coefficienti della TDF come

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

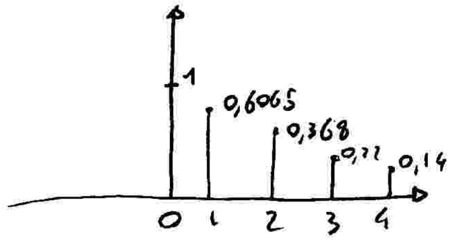
per cui la TDF si definisce come

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k n}{N}} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

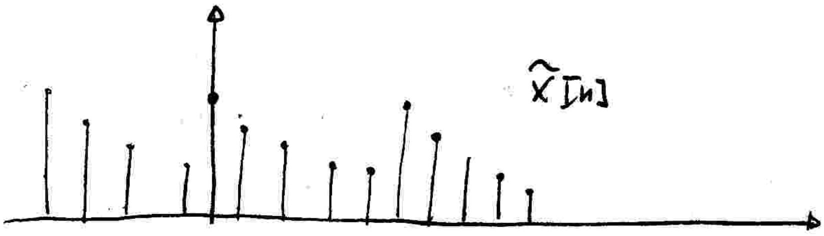
$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

Lezione 14/5/07

$$x[n] = \begin{cases} e^{-\alpha n} & n = 0,1,2,3,4 \\ & \text{altrove} \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}5$$



$N_0 = 5$



$$\tilde{X}[K] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j2\pi \frac{Kn}{N_0}}$$

$$X[K] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{Kn}{N_0}} \qquad 0 \le K \le N_0 - 1 \quad \text{oppure centrato all'origine}$$

$$X[K] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{4} e^{-0,5n} e^{-j2\pi\frac{Kn}{N_0}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{4} \left(e^{-0,5 - j2\pi\frac{K}{N_0}}\right)^n = \frac{1}{5} \; \frac{1 - e^{-0,5 \cdot 5} e^{-j2\pi\frac{K5}{5}}}{1 - e^{-0,5} e^{-j2\pi K}}$$

<u>Provare trasformata inversa</u>

ifft

Lezione 7/05/2007

Relazione tra TF di una sequenza e TDF

Data una sequenza finita possiamo calcolarne la TF

$$\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi n f T}$$

$$x[n] = \frac{1}{F}\int_0^F \overline{X}(f)\, e^{j2\pi n f T}\, df$$

periodicizzando $x[n]$ con periodo N $\quad \tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{F}\int_0^F \overline{X}(f)\, e^{j2\pi(n-rN)fT}\, df =$$

$$= T\int_0^{1/T} \overline{X}(f) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(n-rN)fT}\, df =$$

visto che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{kt}{T}}$

$\Updownarrow$ TCF

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n T f} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$ $\quad \Rightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi r N f T} = \frac{1}{NT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{k}{NT}\right)$

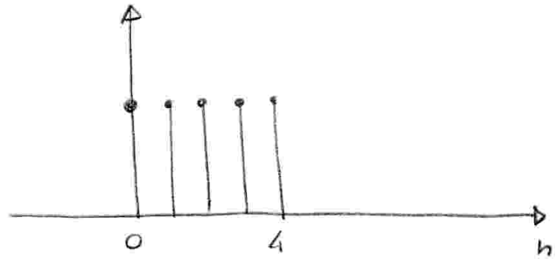
$$= T\int_0^{1/T} \overline{X}(f)\frac{1}{NT}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{NT}\right) e^{+j2\pi n f T}\, df = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^F \overline{X}(f)\,\delta\left(f-\frac{k}{NT}\right) e^{j2\pi n f T}\, df =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}\left(\frac{k}{NT}\right) e^{j2\pi\frac{nk}{N}}$$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\overline{X}\left(\frac{k}{NT}\right)$$

Analisi Spettrale

vogliamo stimare $\bar{X}(f)$ nei punti $\frac{K}{NT}$



$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=0}^{4} \left(e^{-j2\pi f T}\right)^n = \frac{1-e^{-j2\pi f T 5}}{1-e^{-j2\pi f T}} =$$

$$= \frac{e^{-j5\pi f T}}{e^{-j\pi f T}} \frac{\sin 5\pi f T}{\sin \pi f T} = e^{-j4\pi f T} \frac{\sin 5\pi f T}{\sin \pi f T}$$

periodicizzo di

N=5

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \bar{X}\left(\frac{k}{NT}\right) = \frac{1}{5} \frac{\sin \pi k}{\sin \frac{\pi k}{5}} e^{-j\frac{4}{5}\pi k} \qquad k = 0,1,\dots,4$$

N=10

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{10} \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\sin \frac{\pi k}{10}} e^{-j\frac{4}{10}\pi k} \qquad k = 0,1,\dots,9$$

N=20

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{20} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{\sin \frac{\pi k}{20}} e^{-j\frac{4}{10}\pi k} \qquad k = 0,1,\dots,19$$

Invertendo la relazione $\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \bar{X}\left(\frac{k}{NT}\right)$ si ottengono campioni di $\bar{X}(f)$

$$\bar{X}\left(\frac{k}{NT}\right) = N \tilde{X}[k]$$

$\boxed{N.B.}$ Se consideriamo $k = 0,1,\dots,9$ possiamo anche scrivere

$$\bar{X}\left(\frac{k}{NT}\right) = N X[k]$$