La variabile aleatoria è una funzione che associa la classe degli eventi allo spazio dei numeri reali

$$X: S \longrightarrow R$$

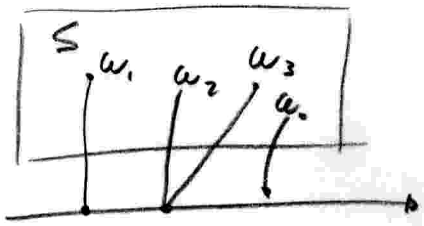
X associa ad ogni risultato dell'esperimento ω un numero reale x

X è una variabile aleatoria o casuale, se:

a) $X(\omega)$ è una funzione ad un solo valore per cui ad ogni punto ω di Ω corrisponde un solo numero

b) l'insieme di S per cui $X(\omega) \leq x_i$ rappresenta un evento per ogni numero reale x_i

L'insieme di S formato dai punti ω | $X(\omega) \leq x_i$ è un evento al quale è associata una probabilità



$$P\{X(\omega) \leq x_i\} \qquad \text{con } x = X(\omega)$$

permette di associare la stessa prob. all'insieme dei numeri reali $\{x : x \leq x_i\}$

c) la prob. di $X(\omega) = \pm\infty$ è nulla.

<u>Funzione di distribuzione</u> della variabile aleatoria X

$$F_X(x) \triangleq P\{X \leq x\}$$

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

3) $F_X(x)$ è monotona non decrescente $\forall x_1 \leq x_2 \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

ok **Variabili aleatorie discrete** 16/11/07 ②

X si dice discreta se assume un numero finito od una infinità numerabile di valori distinti $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$

es. variabili discrete lancio moneta, dado

Gli eventi $\{X=x_i\}$ sono incompatibili

$$\sum_i P\{X=x_i\}=1$$

la funzione $p_i = P\{X=x_i\}$ è detta funzione massa di probabilità

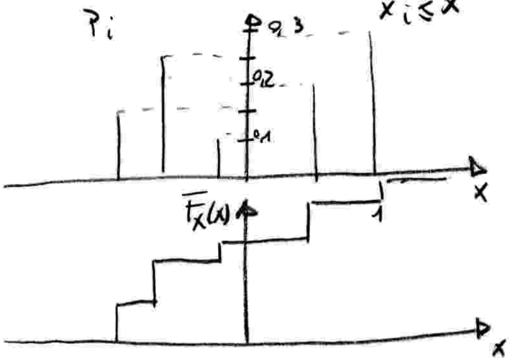
es

lancio dado $P\{\omega_i\}=\frac{1}{6}$

Ogni evento $\{X \leq x\}$ è esprimibile come somma di tutti gli eventi incompatibili $\{X=x_i\}$ per i quali $x_i \leq x$, per cui dalla massa di probabilità si ottiene la funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P\{X=x_i\} = \sum_i P\{X=x_i\}\, u(x-x_i)$$

es)



costruire la funzione di distribuzione nel caso del lancio del dado

Variabile aleatoria continua

si dice continua se può assumere un'infinità di valori ($x \in \mathbb{R}$ $x \in [a,b]$).

ogni valore ha probabilità nulla $P\{X=x\}=0$ $\boxed{N.B.}$ $P\{X=x\}=F_X(x^+)-F_X(x^-)$

Se $F_X(x)$ è derivabile si definisce la densità di probabilità di X la funzione:

$$f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad (1)$$

1) $f_X(x) \geq 0$ infatti $F_X(x)$ è non decrescente

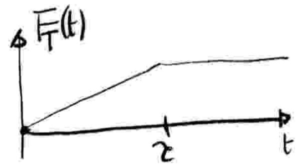
2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)d\alpha$ (si integra la definizione (1) con $F_X(-\infty)=0$)

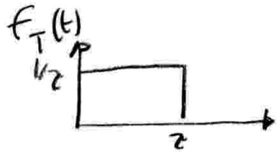
3) $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = F_X(x_2)-F_X(x_1)$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\boxed{es}$ una chiamata telefonica può avvenire tra 0 e τ, la probabilità dell'evento T telefonata tra t_1 e t_2 $P\{t_1 \leq T \leq t_2\} = \frac{t_2-t_1}{T}$

è continua infatti assume ogni valore tra 0 e τ $P\{T=t\}=0$





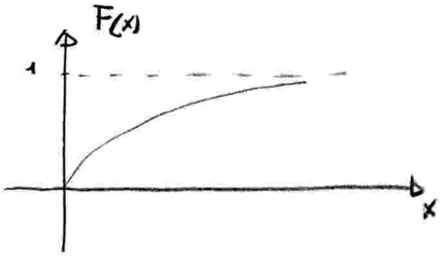
$\boxed{es}$ funzione di distribuzione

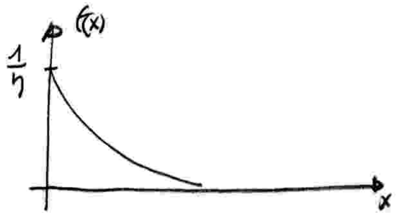
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<0 \\ 1-e^{-x/\eta} & x \geq 0 \end{cases}$$

η numero reale positivo

verificare che $0 \leq F_X(x) \leq 1$ $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ $F_X(x)$ non decrescente

$$f(x) = \frac{1}{\eta} e^{-x/\eta}$$





(ok) Variabili discrete

16/11/07 (4)

Si può estendere alle discrete il formalismo della funzione densità di probabilità

Si utilizza la funzione generalizzata $\delta(x)$

$\boxed{N.B.}$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, g(x)\, dx = g(x_0)$

consideriamo una v.a. discreta che assume i valori x_i con prob. p_i

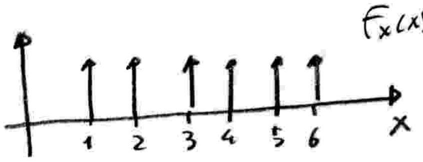
$$f_X(x) = \sum_i p_i\, \delta(x-x_i)$$

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f_X(x)\, dx = \sum_i p_i \int_a^b \delta(x-x_i)\, dx$$

valida anche se a e b non coincidono con x_i, visto che l'integrale da valore $\neq 0$ solo se a,b contiene x_i

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{6} p_i\, \delta(x-x_i)$$

per il dado



(6ⁿ) Trasformazioni di variabili casuali

Detta X variabile casuale definita su un esperimento e sia $g(x)$ una funzione della variabile reale.
si può definire per lo stesso esperimento una nuova variabile $Y = g(X)$

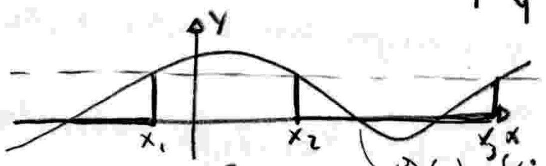
evento $\{Y = y\}$ che può essere scritto anche $\{g(X) = y\}$

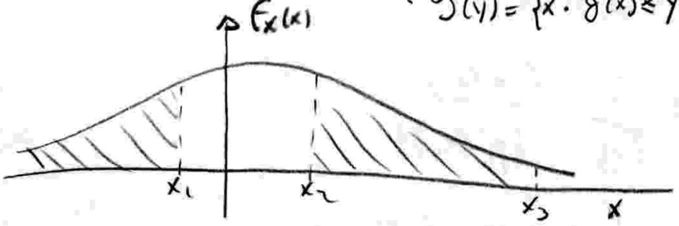
l'evento $\{Y \leq y\}$ può scriversi anche $\{g(X) \leq y\}$ è costituito da tutti i risultati per i quali la X assume i valori $x : g(x) \leq y$
che può dedursi dalla legge di distribuzione di X

$$F_Y(y) \triangleq P\{Y \leq y\} = P\{x : g(x) \leq y\}$$

da questa si ottiene $f_Y(y) = \dfrac{d F_Y(y)}{dy}$ si chiama $\mathcal{J}(y) = \{x : g(x) \leq y\}$

se è nota $f_X(x)$ $F_Y(y) = \int_{\mathcal{J}(y)} f(x)\, dx$



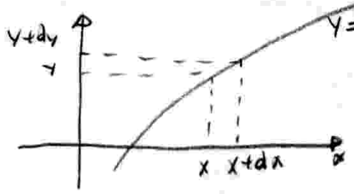


$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} \int_{\mathcal{J}(y)} f_X(x)\, dx$$

M.B. → Funzioni discrete

casob
X e $Y = g(X)$ continue

es: $g(x)$ monotona crescente $\Rightarrow$ $y = g(x)$ ha una sola soluzione



gli eventi $\{y < Y \leq y+dy\}$ e $\{x < X \leq x+dx\}$ sono uguali perché sono costituiti dagli stessi risultati

$$f_Y(y)\, dy = f_X(x)\, dx$$

visto che $dy = g'(x)\, dx$ $\qquad f_Y(y) = \left.\dfrac{f_X(x)}{g'(x)}\right|_{x = g^{-1}(y)}$

se $g(x)$ monotona decrescente $\qquad f_Y(y) = \left.\dfrac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x = g^{-1}(y)}$

↓

$g(x)$ qualunque

se Y assume valori discreti $y_1, y_2, \dots y_k$

$$P\{Y=y_k\}$$

1) X discreta

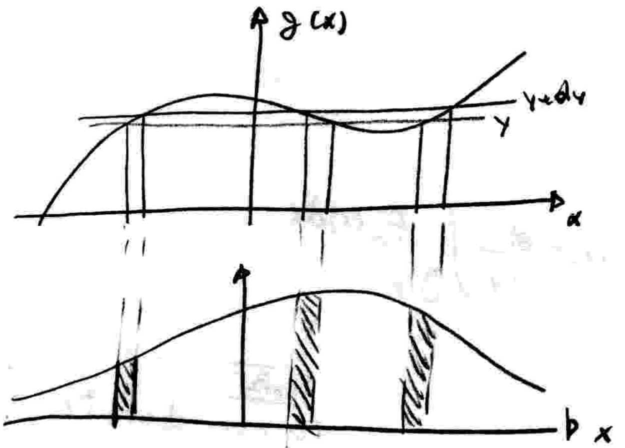
$$\{g(x)=y_k\} \equiv \text{somma di tutti gli eventi } \{X=x_i\}$$

per i quali $y_k = g(x_i)$

$$g(y_k) \triangleq \{x_i : g(x_i)=y_k\}$$

$$P\{Y=y_k\} = \sum_{g(y_k)} P\{X=x_i\}$$

es $\quad Y=X^2 \qquad P\{Y=4\} = P\{X^2=4\} = P\{X=2\} + P\{X=-2\}$



ad un valore della y corrispondono i valori x_1, x_2 della X

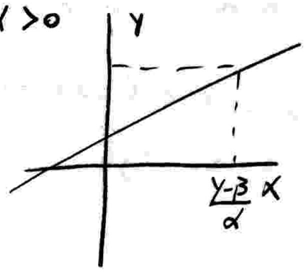
$$\{y < Y \le y+dy\} = \{x_1 < X \le x_1+dx_1\} + \dots + \{x_k < X \le x_k+dx_k\}$$

$$f_Y(y) = \sum_{g(y)} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \qquad (3)$$

dove la somma è estesa a tutti gli x_i per cui $g(x_i)=y$

$\boxed{\text{ES}}$ $\quad y = \alpha x + \beta$

$\alpha > 0$

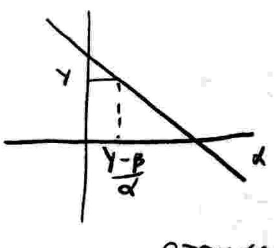


$$g(y) = \{x : g(x) \le y\} \qquad x \le \frac{y-\beta}{\alpha}$$

$$F_Y(y) = P\left\{X \le \frac{y-\beta}{\alpha}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-\beta}{\alpha}} f_X(x)\,dx = F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

se $\alpha < 0$



$$g(y) \quad x \ge \frac{y-\beta}{\alpha} \qquad F_Y(y) = P\left\{X \ge \frac{y-\beta}{\alpha}\right\} = 1 - P\left\{X < \frac{y-\beta}{\alpha}\right\} =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{y-\beta}{\alpha}} f_X(x)\,dx = 1 - F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \qquad f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

oppure con (3) $\quad x = \frac{y-\beta}{\alpha} \quad g'(x) = \alpha$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

Valore medio e varianza (6k)

16/11/07

(5)

Indici che riassumano principali aspetti della legge di distribuzione

Variabile disreta

$$E\{x\} \triangleq \sum_i x_i p_i = \eta_x \qquad \text{Expectation}$$

Potrebbe non coincidere con alcun valore di X. Indice di posizione.

Definizione frequentista

evento $\{X = x_i\}$ la sua frequenza $\frac{n_i}{n}$ $\qquad \eta_x \simeq \sum_i \frac{n_i x}{n}$

Varianza

$$\sigma^2_x = E\{(X-\eta_x)^2\} = \sum_i (x_i - \eta_x)^2 p_i$$

deviazione standard

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2_x}$$

Variabile continua

$$E\{X\} \triangleq \eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$E\{(X-\eta_x)^2\} \triangleq \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 f(x)\, dx$$

Teorema dell'aspettazione (6k)

Se Y è una variabile casuale funzione di un altra variabile X, cioè se $Y = g(X)$ non serve passare per la legge di distribuzione di Y

caso X, Y discrete

$$E\{Y\} = \sum_k y_k \, P\{Y = y_k\}$$

il primo termine $$y_1 \, P\{Y = y_1\} = y_1 \sum_{G(y_1)} P\{X = x_i\} = \sum_{G(y_1)} g(x_i) \, P\{X = x_i\}$$

$$G(y_1) = \{ x_i : g(x_i) = y_1 \}$$

il secondo

$$y_2 \sum_{G(y_2)} P\{X = x_i\} = \sum_{G(y_2)} g(x_i) \, P\{X = x_i\}$$

siccome $G(y_i)$ sono partizioni di $\mathbb{R}$

$$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i) \, P\{X = x_i\}$$

Nel caso in cui X sia una variabile continua

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, f_X(x) \, dx$$

$$E\{g(X) + c\} = E\{g(X)\} + c$$

$$E\{c\,g(X)\} = c\,E\{g(X)\}$$

$$E\{h(X) + g(X)\} = E\{h(X)\} + E\{g(X)\}$$

Distribuzioni Continue (ok)

Variabile uniforme:

X uniforme nell'intervallo (a,b) con $X \in \mathcal{U}(a,b)$

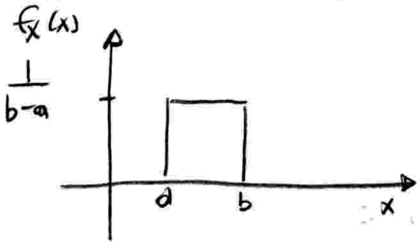
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

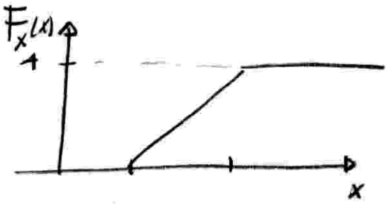
$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x-\eta_x)^2\} = E\{x^2+\eta_x^2-2\eta_x x\} = E\{x^2\}+E\{\eta_x^2\}-2\eta_x E\{x\} =$$

$$= E\{x^2\}-\eta_x^2 = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} - \frac{b^2+a^2+2ab}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$





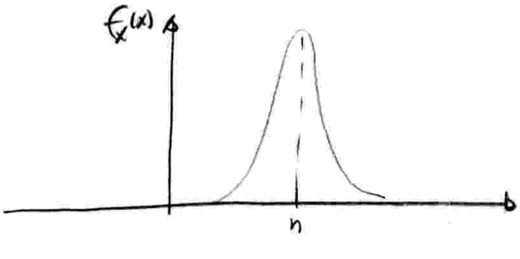
Variabili normali (o gaussiane)

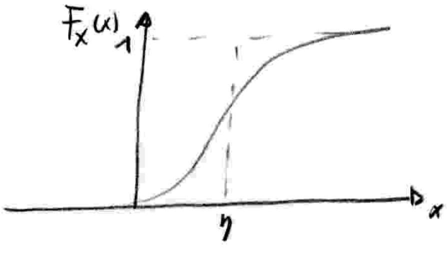
$$x \in N(\eta, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \qquad \eta, \sigma^2 \text{ parametri della distribuzione}$$

Funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx$$





16/11/07 7

Si consideri $Z = \dfrac{X-\eta_x}{\sigma_x}$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_x}\right)} f_x\left(\frac{x-\eta_x}{\sigma_x}\right) = \sigma_x \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

quindi anche essa normale con $\eta_z = 0$ $\sigma_z^2 = 1$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\exists$ tabelle che forniscono $\Phi(z)$ in funzione di z

è possibile stimare $P\{a \leq X \leq b\}$ con $X = \sigma_x Z + \eta_x$

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a \leq \sigma_x Z + \eta_x \leq b\} = P\left\{\frac{a-\eta_x}{\sigma_x} \leq z \leq \frac{b-\eta_x}{\sigma_x}\right\} =$$
$$= \Phi\left\{\frac{b-\eta_x}{\sigma_x}\right\} - \Phi\left\{\frac{a-\eta_x}{\sigma_x}\right\}$$

3.41 ok

peso nominale è 250 g
peso reale v.a. con η_x 250 . Calcolare σ se il 5% dei pacchetti pes. > 252 g.
Calcolare $P\{X < 245\}$

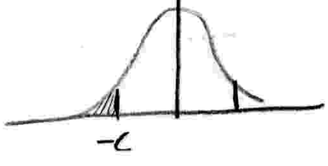
$P\{X > 252\} = 0{,}05$ $\qquad$ $0{,}95 = 1 - P\{X \leq 252\}$

$$0{,}05 = 1 - P\{X \leq \eta_x + 2\} = 1 - P\{X - \eta_x \leq 2\} =$$
$$= 1 - P\left\{\frac{X-\eta_x}{\sigma_x} \leq \frac{2}{\sigma_x}\right\} = \qquad Z = \frac{X-\eta_x}{\sigma_x}$$

$P\left\{z \leq \frac{2}{\sigma_x}\right\} = 0{,}95$ $\qquad$ $\frac{2}{\sigma} = 1{,}6449 \Rightarrow \sigma = 1{,}2159$

$$P\{X \leq 245\} = P\{X - \eta \leq -5\} = P\left\{\frac{X-\eta}{\sigma} \leq \frac{-5}{1{,}2157}\right\} = \Phi(-4.11) = 1 - \Phi(4.11)$$

visto che è simmetrica


$-c$

$\Phi(-c) = 1 - \Phi(c)$

E {