Seymour Lipschutz, Calcolo delle
Probabilita', McGraw-Hill

$D^{v}_{n,k}$, $D_{n,k}$, $C^{r}_{n,k}$, $C_{n,k}$

$\downarrow$

$n=k$ P_n

$\{1, 2, 3\}$

$k=2$

$D^{v}_{3,2} = 3^2$

1,1 1,2 1,3
2,1 2,2 2,3
3,1 3,2 3,3

$D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!}$

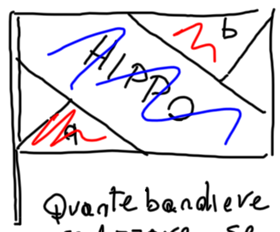
1,2 1,3
2,1
3,1 3,2

$C^{v}_{3,2} = \binom{3+2-1}{2}$

1,1
2,1 2,2
3,1 3,2 3,3

$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!}$

2,1
3,1 3,2



bianco ocra
rosso azzurro
nero violetto
giallo arancione
verde

Quante bandiere si possono realizzare se

I) scritta centrale o rossa o nera
tutte le zone hanno colori diversi

II) come I ma a e b hanno lo stesso colore

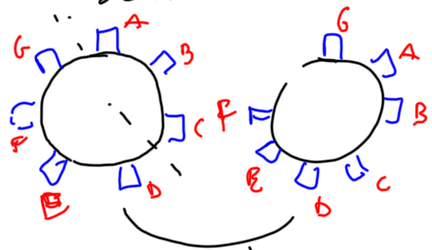
I) $D_{8,4} \times 2 \times 8$

II) $D_{8,3} \times 2 \times 8$

ES In quanti modi diversi 10 persone possono sedersi su una panchina da 4 posti?

$$D_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

ES In quanti modi 7 persone possono sedersi ad un tavolo rotondo?



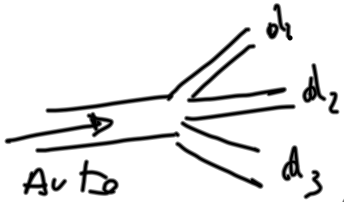
$D_{7,7} = P_7$

$N = \frac{P_7}{7}$

A e B vogliono stare vicine

$$\frac{2P_6}{6}$$

Es 10 Automobili



In quanti modi le 10 Auto posso distribuirsi sui 3 percorsi?
Distinguere i seguenti casi

a) auto tutte uguali

$$C^{(r)}_{3,10} = \binom{10+3-1}{10} = \frac{12!}{10!\,2!} = 66$$

b) auto tutte diverse

$$D^{(r)}_{3,10} = 3^{10}$$

c) 5 classe A, 3 classe B, 2 classe C

$$C^{(r)}_{3,5} \qquad C^{(r)}_{3,5}\cdot C^{(r)}_{3,3}\cdot C^{(r)}_{3,2}$$

$$C^{(r)}_{3,3}$$

$$C^{(r)}_{3,2}$$

Diagramma ad albero

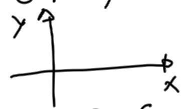
A e B insiemi

$A \times B$ insieme prodotto

dato dalle coppie ordinate (a,b)

con $a \in A$, $b \in B$

$\boxed{\text{ES}}$ $\mathbb{R}^2$



- $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{ (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3) \}$$

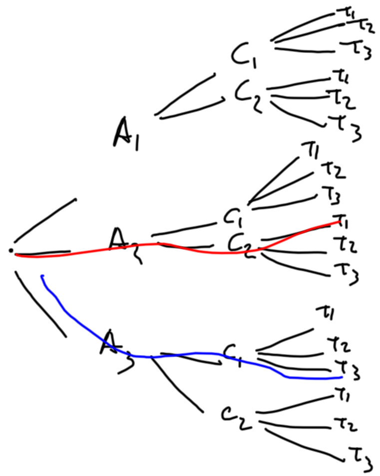
A ha p elementi
B ha q elementi $\Rightarrow$ $A \times B$ $p \cdot q$

ES) Un uomo può scegliere tra 3 Abiti $A = \{A_1, A_2, A_3\}$

2 Camicie $B = \{C_1, C_2\}$

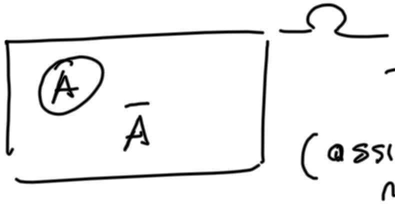
3 Cravatte $T = \{T_1, T_2, T_3\}$

in quanti modi può vestirsi?



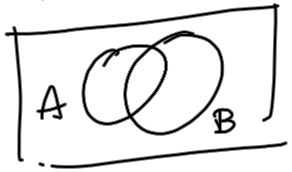
$A \times C \times T$

$3 \times 2 \times 3 = 18$



$P(\Omega) = 1$
(assioma di normalizzazione)

A evento $\quad P(A) \geq 0 \quad \forall$ evento $\in \Omega$



A e B si dicono mutuamente esclusivi se $A \cap B = \emptyset$

- se mut. esclusivi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- se non mut. esclusivi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

es) 52 carte (Poker)

A: Re $\quad P(A) = \frac{4}{52}$

B: estraggo picche $\quad P(B) = \frac{13}{52}$

$P = \frac{n_{favorevoli}}{n_{possibili}} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

prob. di estrarre un Re o una carta di picche?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

– Urna contiene 10 palline bianche
15 palline nere
20 blu
25 rosse

Trovare la prob. che 1 pallina estratta sia

a) bianca o nera b) blu o rossa

c) bianca, nera o blu

a) $P(\text{bianca} \cup \text{nera}) = P(\text{bianca}) + P(\text{nera}) =$

$= \frac{10}{70} + \frac{15}{70}$ . . . .

b) $P(\text{blu o rossa}) = \frac{20}{70} + \frac{25}{70}$

– Lancio 3 dadi

$P(\text{3 numeri dispari})$

casi favorevoli e i casi possibili

$A = \{\text{3 numeri dispari}\}$ $p = \frac{n_f}{n_{poss.}}$

$D^{(r)}_{6,3} = 6^3$ $p = \frac{D^{(r)}_{3,3}}{D^{(r)}_{6,3}}$

$D^{(r)}_{3,3} = 3^3$

– Prob. che ci siano almeno due "1"

$C_{3,2} \cdot 5 + 1$

$p = \frac{C_{3,2} 5 + 1}{D^{(r)}_{6,3}}$

$\boxed{1, 1, 1}$

– 20 pneumatici, 3 difettosi
si scelgono 4 pneumatici a caso
Calcolare la prob. che 1 sia difettoso

– casi possibili $C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{16!\,4!}$

casi favorevoli

$C_{17,3}$

$C_{3,1} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$

$C_{17,3}\,C_{3,1}$

$P = \frac{C_{17,3} \cdot C_{3,1}}{C_{20,4}}$

– estrazione di due pneumatici 20 (3 diff)
A = {entrambi sono difettosi}
B = {entrambi sono non difettosi}
C = {almeno 1 è difettoso}

casi possibili $C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{18!\,2!} = 190$

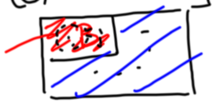
P(A). $C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$

$P(A) = \frac{C_{3,2}}{C_{20,2}}$

P(B)

$P(B) = \frac{C_{17,2}}{C_{20,2}}$

P(C)

B  Ω

$C = \overline{B}$

$P(\Omega) = P(B) + P(\overline{B})$

$P(C) = P(\Omega) - P(B) =$
$= 1 - \frac{C_{17,2}}{C_{20,2}}$

— 4 lanci di un dado a 6 facce

Prob. che i risultati compaiano in ordine strettamente crescente.

1, 4, 5, 6 ok

3 4 5 6

1 1 2 3 no!

$$P = \frac{n_f}{n_p}$$

n possibili $\qquad D^{(r)}_{6,4} = 6^4$

— strett. crescente $\Rightarrow$ non c'è ripet.

1 4 5 6 $\qquad$ 1 2 3 4

4 5 6 1 no $\qquad$ 4 3 2 1 no

1 5 4 6 no $\qquad$ 4 3 2 1

6 5 4 1 $\qquad$ 1 2 3 4

$C_{6,4}$ $\qquad$ 1 2 4 5

1 2 5 6

⋮

$$P = \frac{C_{6,4}}{D^{(r)}_{6,4}}$$

Prob. condizionata

Dati due eventi A e B.
La conoscenza dell'esito di un evento come modifica la prob. dell'altro evento?

$P(A|B)$ prob. A supposto verificato l'evento B

$P(B|A)$ prob. evento B supposto verificato evento A

caso eventi indipendenti

A e B indip. $P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

$P(AB) = P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

eventi dipendenti $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

si suppone verificato B $P(B) \neq 0$

- 52 carte Poker

  A = { estrazione donna di cuori }

  B = { estrazione donna }

$P(A) = \dfrac{1}{52}$ $P(B) = \dfrac{4}{52}$

$P(A|B) = \dfrac{1}{4}$

- Si vince se si ottiene 1

  se viene un numero pari si ripete finché non viene uno dispari

$A = \{1\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

1	2	3
4	5	6

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(AB) = 1/6$ $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$

$P(B) = 1/2$