UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Scienze Motorie

Tecnologie e strumentazione biomedica

Accenni sulla Trasformata di Fourier

Alberto Macerata

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Fourier (1768-1830)

Jean Baptiste Joseph **Fourier** era un rivoluzionario (partecipò alla Rivoluzione Francese), un diplomatico (in Egitto, al seguito di Napoleone), un allievo e poi un professore alla **École Normale Supérieure.**

Come matematico si occupò, tra l'altro, della teoria della propagazione del calore e come modellare l'evoluzione della temperatura per mezzo di serie trigonometriche.

Fourier scoprì che qualunque **funzione periodica** ***f(t)***, di periodo ***T***, può essere espressa come somma di un termine costante più tanti termini (anche infiniti) in seno e coseno di pulsazioni multiple di quella fondamentale (cioè ω), secondo la formula:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

Dove il termine ω , cioè la *pulsazione*, è dato da: $\omega = 2\pi / T$ oppure $\omega = 2\pi f$.

Il metodo e' reversibile e consente di ricomporre il segnale a partire dalla serie di sinusoidi.

Serie di Fourier

Dalla Fisica sappiamo che qualsiasi combinazione lineare di onde sinusoidali con lo stesso periodo ma di differenti fasi è ancora un'onda sinusoidale dello stesso periodo, ma con una nuova fase.

Nella formula le coppie di termini del tipo $a \cos \omega t$ e $b \sin \omega t$ possono essere riscritte come:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = (a^2 + b^2)^{1/2} \sin (\omega t + \varphi)$$

dove

$\varphi = \arctan(b/a)$ se $a \geq 0$

$\varphi = \pi + \arctan(b/a)$ se $a < 0$

La formula può quindi essere riscritta come:

$$f(t) = c_0 + c_1 \sin (\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin (2\omega t + \varphi_2) + \cdots$$

oppure, in maniera compatta

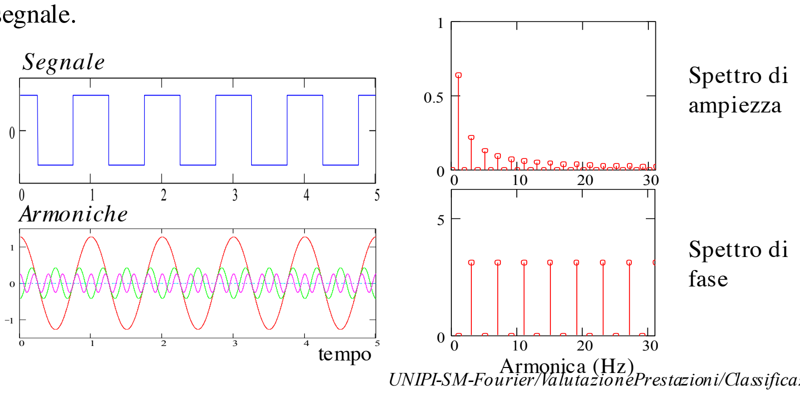
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin (\omega t + \varphi_k)$$

Scomposizione in Serie di Fourier

Un **segnale periodico** può essere decomposto in una somma di oscillazioni sinusoidali (***armoniche***), ciascuna caratterizzata dalla sua *ampiezza* e *fase*.

Possiamo rappresentare questi valori di ampiezza e fase sotto forma di grafici, mettendo sulle ascisse il valore delle armoniche in ordine crescente e sulle ordinate le ampiezze, o le fasi, di ciascuna armonica.

Questi grafici si chiamano rispettivamente: ***spettro di ampiezza e di fase*** del segnale.



Ricomposizione dalla Serie di Fourier

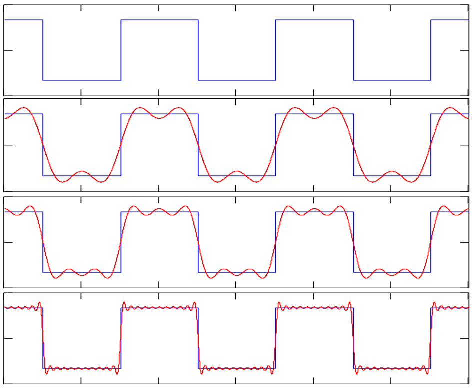
Approssimazione di un segnale “onda quadra” con le sue prime armoniche

“onda quadra”

2 armoniche

3 armoniche

11 armoniche



UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

Ricomposizione dalla Serie di Fourier

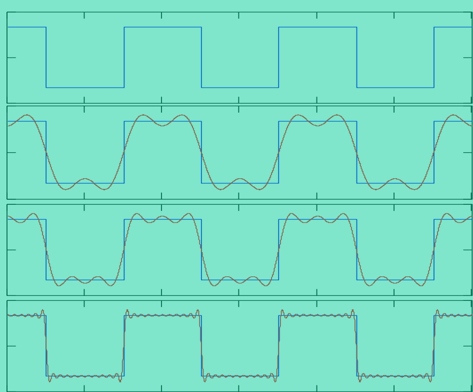
Approssimazione di un segnale “onda quadra” con le sue prime armoniche

“onda quadra”

2 armoniche

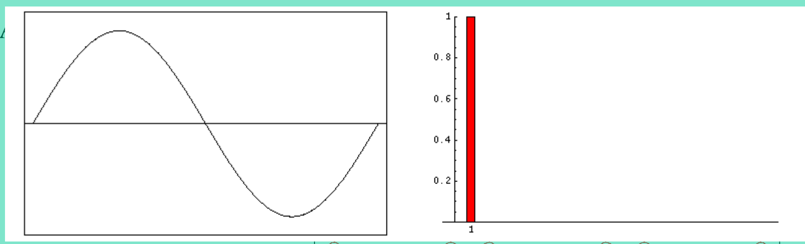
3 armoniche

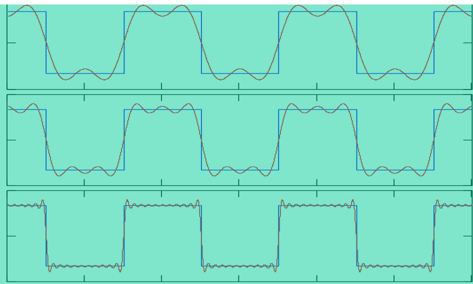
11 armoniche



UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

Ricomposizione dalla Serie di Fourier





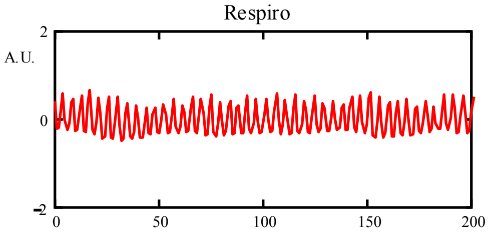
2 armoniche

3 armoniche

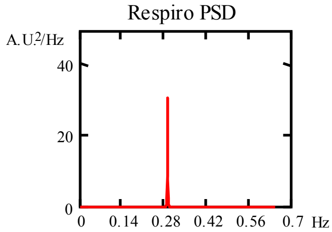
11 armoniche

Analisi in frequenza di segnali biologici

Grafico dei parametri nel tempo



Spettro di ampiezza



L'espansione in serie di Fourier per segnali periodici scompone il segnale in una somma di sinusoidi illimitate nel tempo (spettro in frequenza e in fase).

Molti segnali biologici hanno caratteristiche quasi-periodiche (respiro, ECG, pressione sanguigna) e ad essi può ancora essere applicato il metodo della scomposizione di Fourier a patto che le caratteristiche del segnale si mantengano costanti nel tempo.

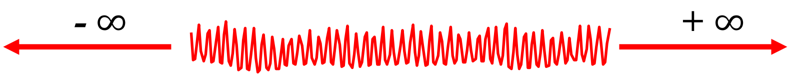
Dalla Serie alla Trasformata di Fourier

Il metodo di Fourier (espansione in serie per segnali periodici) può essere esteso anche a segnali non periodici ipotizzando che il periodo della componente a frequenza più bassa sia ∞

In questo caso parleremo di Trasformata di Fourier che è definita come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

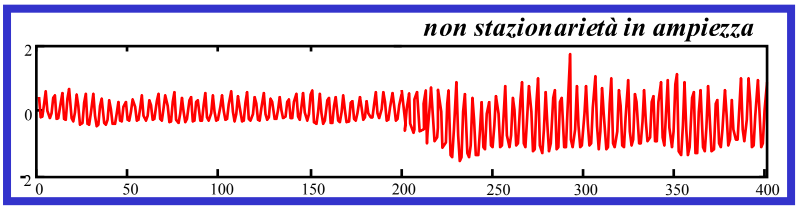
dove $X(f)$ rappresenta la trasformata continua di Fourier del segnale $x(t)$.

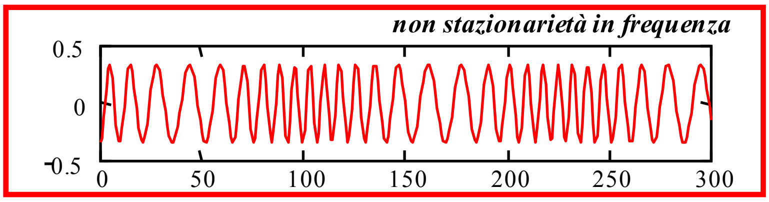


Problemi nell'uso pratico

Nella pratica:

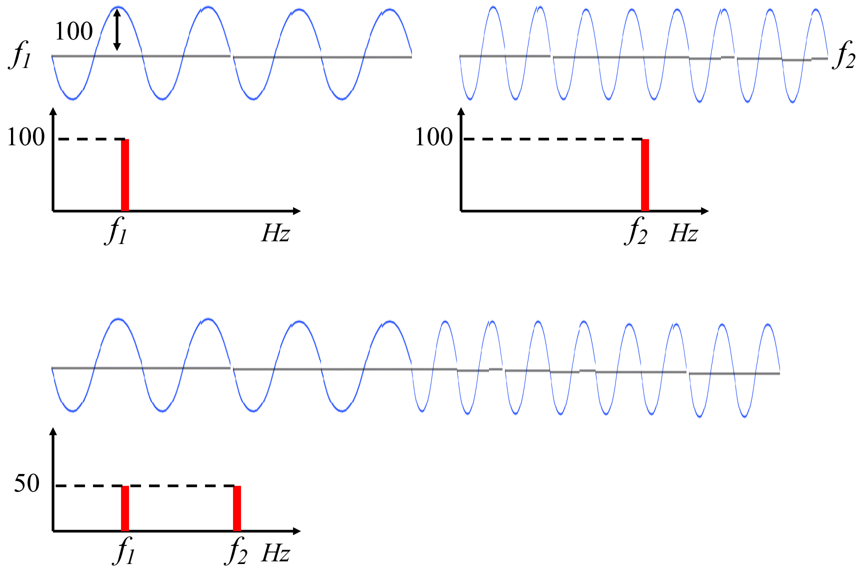
- non abbiamo a disposizione segnali di lunghezza illimitata nel tempo
- le caratteristiche del segnale non sono costanti nel tempo (cioè il segnale è ***non stazionario***)





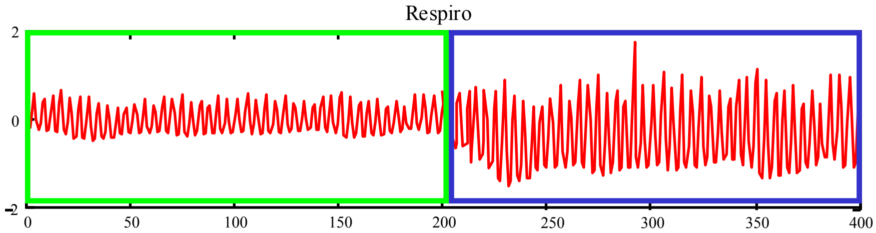
UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

Non stazionarietà



UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

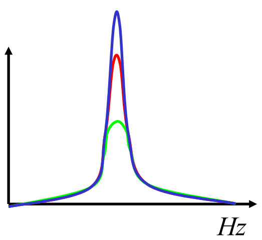
Non stazionarietà: intervallo di analisi



Consideriamo un segnale respiratorio dove, a partire da un certo istante, l'ampiezza dell'escursione polmonare inspirazione-espirazione cresce. Il segnale presenta una chiara *non stazionarietà* dovuta all'ampiezza che cambia.

L'analisi di Fourier applicata su questo intervallo fornisce un risultato che "media" l'ampiezza dell'oscillazione respiratoria su tutto l'intervallo.

Se pure il risultato è corretto matematicamente è di scarsa utilità pratica in quanto fornisce un'ampiezza che non è reale poiché il segnale è più basso all'inizio e più alto alla fine.

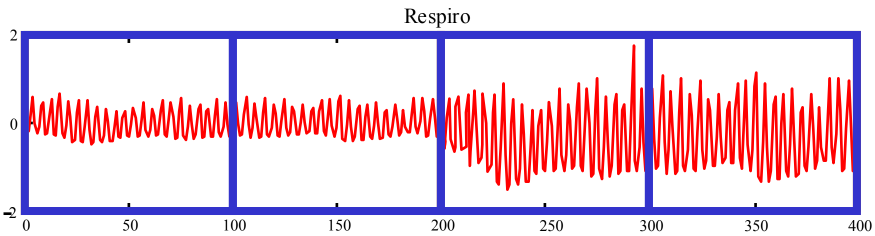


UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

Uso di finestre temporali

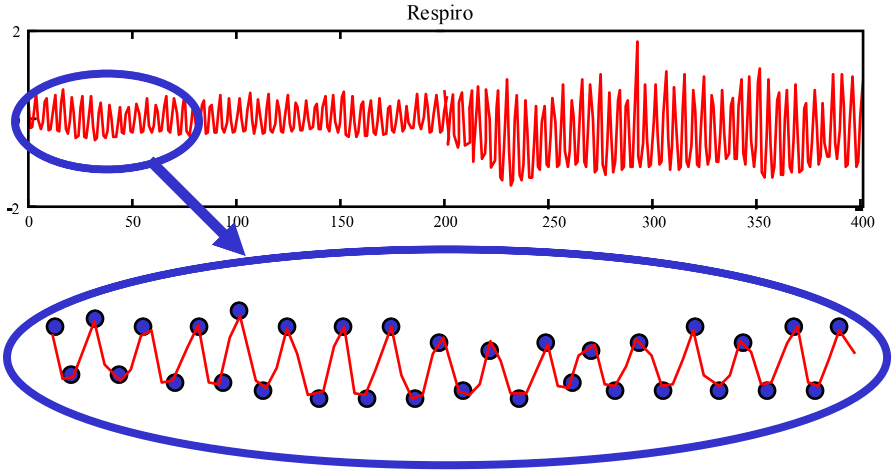
Per avere risultati corretti devo applicare il metodo su intervalli *stazionari*, cioè “stabili” sia in ampiezza che in frequenza.

Nella pratica questa condizione si ottiene più facilmente prendendo intervalli molto corti, così da limitare la presenza di variazioni significative del segnale.



Trasformata di Fourier: dati campionati

In pratica, il segnale in arrivo dal convertitore A/D è una sequenza di numeri, cioè i ***campioni*** del segnale.

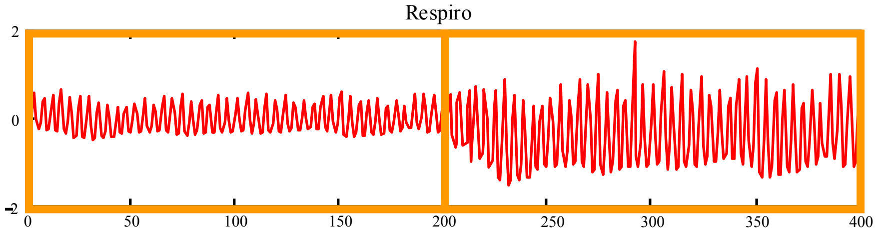


Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Con dati discreti, usare "finestre" temporali significa prendere in considerazione un certo numero di campioni che cadono all'interno della finestra.
Potremo quindi parlare, per esempio, di finestre temporali di 1 sec. oppure, equivalentemente, di 1000 campioni acquisiti con una frequenza di 1 KHz.

Esempi:

Freq. Campionamento (f_c)	***Numero campioni*** (N)	***Durata*** = $N * (1 / f_c)$
1000 Hz	1000	1 sec.
250 Hz	2000	8 sec.
2000 Hz	4000	2 sec.



UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

Numero di campioni e frequenze

È importante ricordarsi che il limite superiore alle frequenze visualizzabili è dato dalla frequenza di campionamento

Sia N pari o dispari la frequenza massima rappresentabile è pari a $f_c/2$

Risoluzione in frequenza

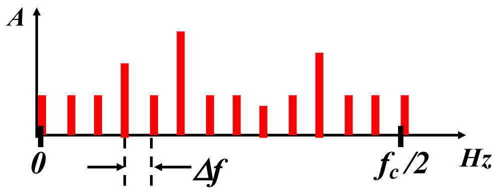
Lo spettro è costituito dalle componenti sinusoidali da frequenza 0 fino a $f_c/2$, La "distanza" tra una componente e la successiva risulta essere:

$$\Delta f = 1 / (N\ T)$$

*dove **T** è il tempo di campionamento*

N T è quindi il tempo di osservazione o durata della finestra di osservazione del segnale

e tale distanza è inversamente proporzionale alla "***risoluzione in frequenza***", cioè alla capacità di "risolvere" frequenze tra loro vicine.



Risoluzione in frequenza

$$\Delta f = 1 / (N\ T)$$

*Se consideriamo la formula per la risoluzione si vede che la risoluzione frequenziale è inversamente proporzionale a N**T***

Quindi, visto che NT è la grandezza temporale della finestra dei dati, si ottiene che la risoluzione è inversamente proporzionale alla finestra di osservazione ovvero per quanto osserviamo il segnale

Se vogliamo distinguere due componenti frequenziali a frequenze

10.1 Hz e 10.2Hz allora dovremo osservare il segnale per almeno 10 secondi

Consigli nell'uso della DFT

La Trasformata di Fourier è uno strumento di indagine fondamentale nell'analisi dei segnali.

Deve essere applicato, ovviamente, con attenzione per evitare risultati di scarso valore o difficilmente interpretabili.

Specialmente nell'analisi di segnali biologici, in cui la variabilità sia nel tempo che in frequenza è elevata, particolare attenzione deve essere prestata alla scelta della ***finestra temporale*** e della ***risoluzione in frequenza***.

La condizione di "non stazionarietà" dei segnali biologici consiglia di usare finestre il più piccole possibili.
D'altra parte usare finestre temporali piccole (cioè con pochi campioni) porta ad avere una scarsa risoluzione in frequenza con il rischio di non risolvere componenti oscillatorie vicine.

La soluzione quindi è trovare una opportuna ***soluzione di compromesso tra risoluzione in frequenza e condizione di stazionarietà***, aiutati dalla conoscenza dei fenomeni che stiamo indagando ed eventualmente da specifiche pre-elaborazioni del segnale.