



UNIVERSITÀ DI PISA  
Corso di Laurea in Scienze Motorie  
Tecnologie e strumentazione biomedica

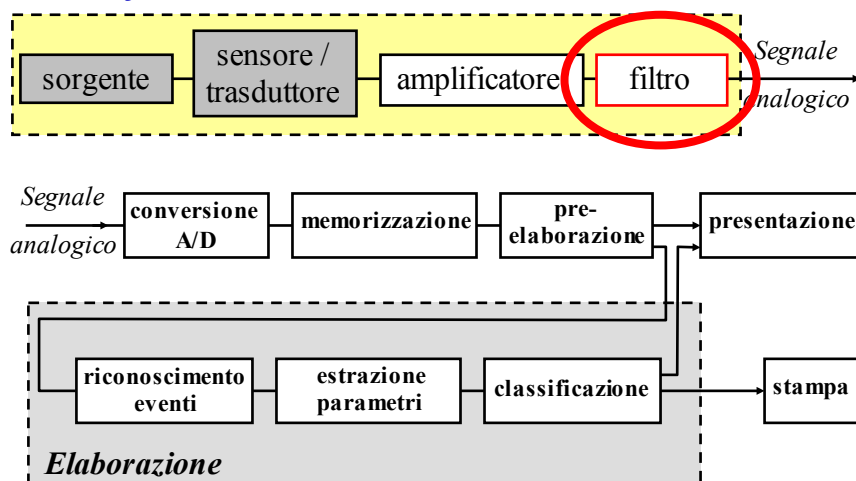
## Filtri

Alberto Macerata  
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

UNIPISM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Acquisizione ed elaborazione di segnali

### Blocchi funzionali



UNIPISM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

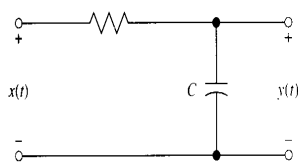
## Filtri

- **passa-basso**: per eliminare componenti ad alta frequenza (per es. potenziali muscolari nell'EEG)
- **passa-alto**: per eliminare componenti a bassa frequenza (per es. lenti spostamenti della linea base del segnale EEG o ECG dovuti a modifiche della resistenza di contatto degli elettrodi)
- **passa-banda**; e' una combinazione dei 2 filtri precedenti. Può anche essere usato per estrarre particolari componenti da un segnale: per es. dal segnale ECG, applicando un passa-banda tra 0.08 e 0.12Hz, si può estrarre la componente respiratoria.
- **elimina-banda**: per eliminare singole componenti a frequenza nota (per es. la frequenza di rete di alimentazione-50 Hz).

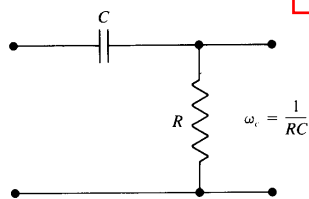
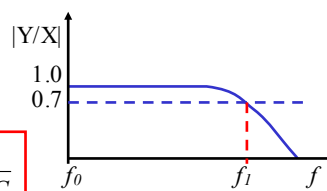
*UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali*

## Filtri

### Filtro passa-basso

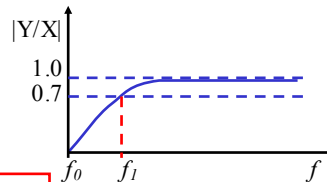


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



### Filtro passa-alto

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 - j(1/\omega RC)}$$



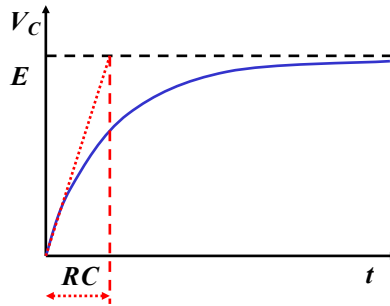
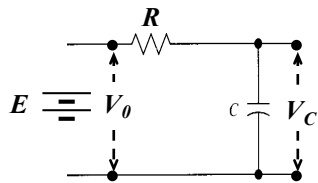
*UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali*

## Carica del condensatore

Il tempo intercorso dal momento del collegamento al momento in cui non c'è più movimento di cariche alle armature si chiama *periodo transitorio di carica* del condensatore.

La tensione ai capi del condensatore è data, nel tempo, da:

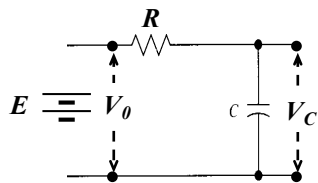
$$V_C = E (1 - e^{-t/RC})$$



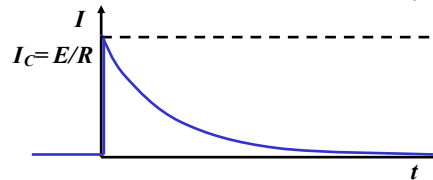
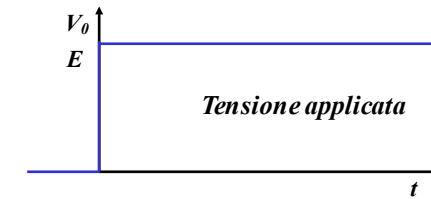
Il termine  $T=RC$  è un elemento caratteristico del circuito e viene detto *Costante di tempo del circuito*.

UNIPI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

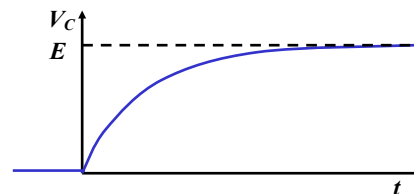
## Corrente e tensioni



*Corrente nel circuito*

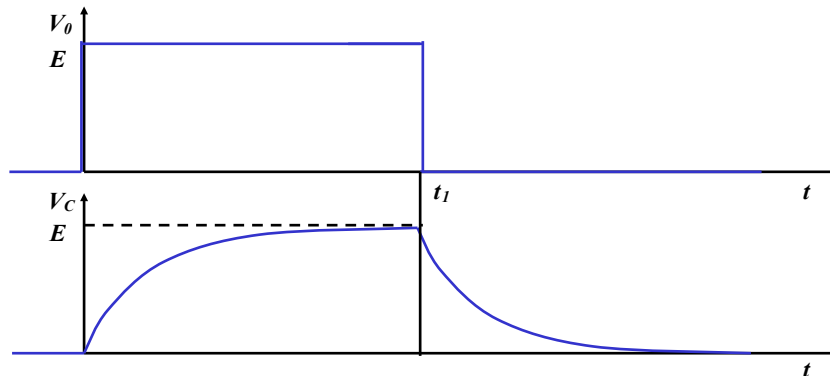


*Tensione ai capi del Condensatore*



UNIPI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

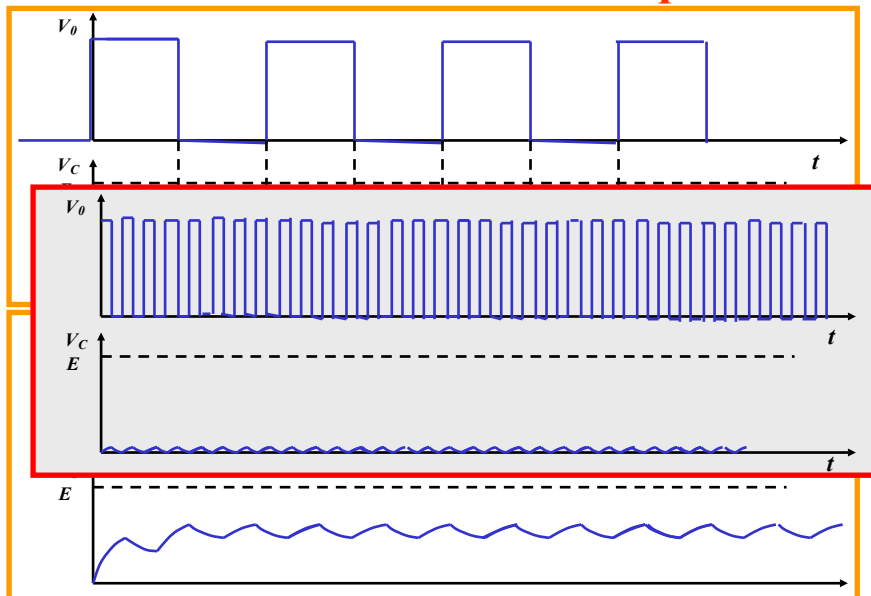
## Carica e scarica del condensatore



Se all'istante  $t_1$  sostituisco alla batteria un corto circuito, la tensione presente ai capi del Condensatore fa sì che si generi nel circuito una corrente, di verso opposto alla precedente. Questa corrente dura fino a che tutte le cariche accumulate sull'armatura del condensatore sono ridistribuite in tutto il circuito. La tensione ai capi del Condensatore è ancora un'esponenziale che va da  $E$  a  $0$ , con la stessa costante di tempo  $T=RC$ .

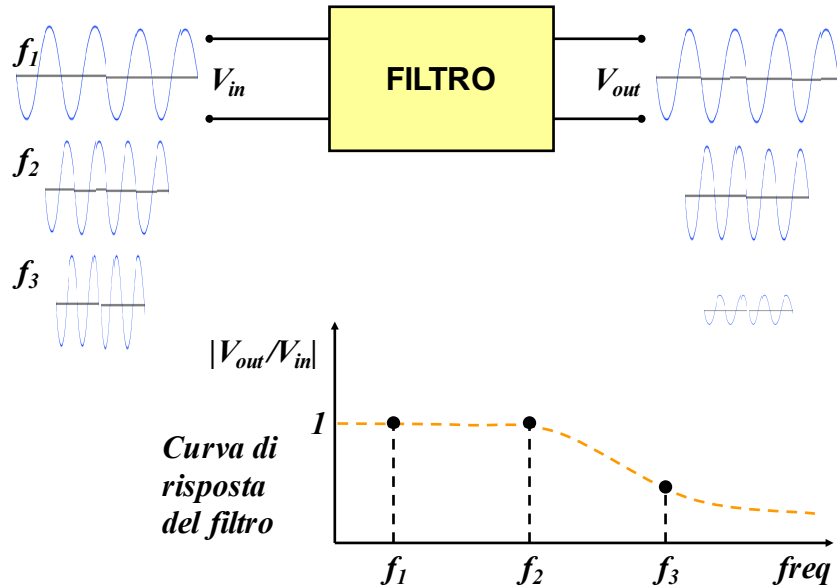
*UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali*

## Tensione al variare della frequenza



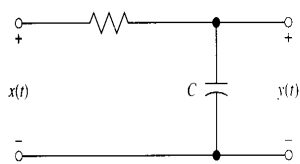
*UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali*

## Risposta di un filtro

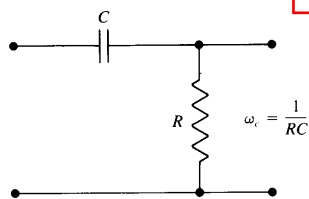
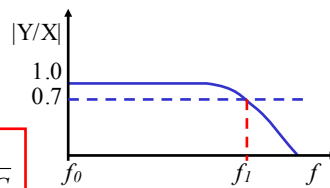


## Filtri

### Filtro passa-basso

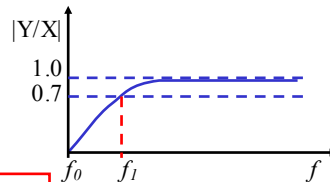


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



### Filtro passa-alto

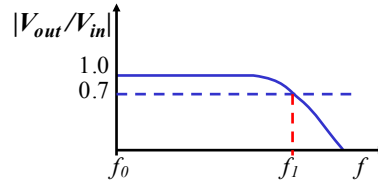
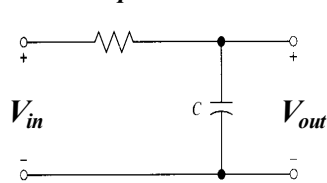
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 - j(1/\omega RC)}$$



UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-basso

*Filtro passa-basso*



$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$G = (1 - j\omega RC) / [(1 - j\omega RC)(1 + j\omega RC)]$$

$$G = (1 - j\omega RC) / [1 - (j\omega RC)^2]$$

$$G = (1 - j\omega RC) / [1 + (\omega RC)^2]$$

$$G = 1 / [1 + (\omega RC)^2] - j\omega RC / [1 + (\omega RC)^2]$$

$$G = \{ 1 / [1 + (\omega RC)^2] \} (1 - j\omega RC)$$

$$|G| = \{ 1 / [1 + (\omega RC)^2] \} \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

Ricordiamo che:

$$\omega = 2\pi f$$

$$|G| = |V_{out}/V_{in}| = 1 / \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Esempio: Filtro passa-basso

Ricordando che:  $\omega = 2\pi f$  posso riscrivere G:

$$|G| = |V_{out}/V_{in}| = 1 / \sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}$$

Nel nostro esempio abbiamo  $R = 1\text{K}\Omega$  e  $C = 1\mu\text{F}$ , cioè  $R = 10^3\Omega$  e  $C = 10^{-6}\text{F}$

Vogliamo calcolare  $f$  quando  $G = 0.707$ , cioè il limite del filtro passa-basso.

Elevando al quadrato ottengo:  $|G|^2 = 1 / [1 + (2\pi f RC)^2]$  (1)

Sostituendo i valori ottengo:

$$2\pi f RC = 2 \times (3,14) \times f \times (10^3 \times 10^{-6}) = 6,28 \times f \times 10^{-3}$$

da cui, elevando al quadrato:  $(2\pi f RC)^2 = (6,28)^2 \times f^2 \times 10^{-6}$

Sostituendo il valore  $G = 0.707$ , la (1) diventa ora:

$$(0.707)^2 = 1 / [1 + (39,4 \times f^2 \times 10^{-6})]$$

Risolvendo in  $f^2$  otteniamo con passi successivi:

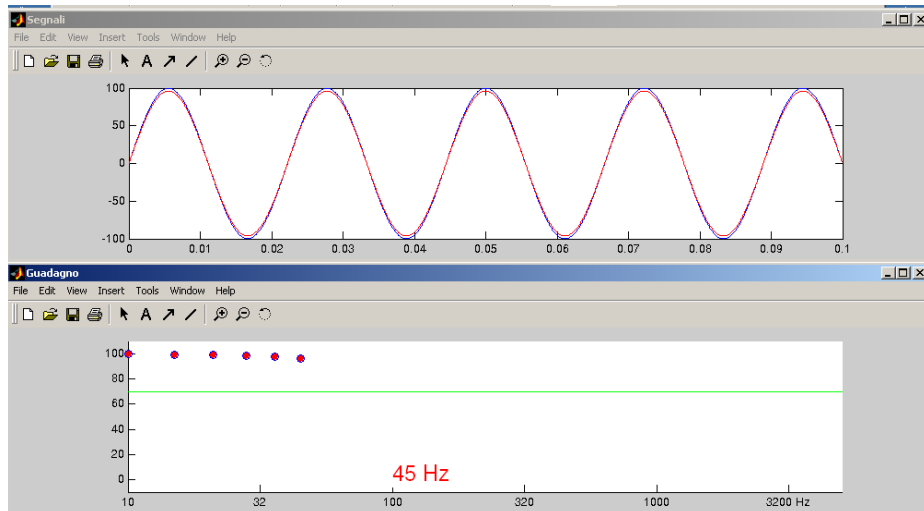
$$1 + (39,4 \times f^2 \times 10^{-6}) = 1/0.5 \quad \rightarrow \quad (39,4 \times f^2 \times 10^{-6}) = (1/0.5) - 1$$

$$f^2 = (2.04 - 1) / (39,4 \times 10^{-6}) \quad \rightarrow \quad f^2 = (1.04 / 39,4) \times 10^6$$

$$f^2 = 0.0264 \times 10^6 \quad \rightarrow \quad f = 0.163 \times 10^3 \quad \text{cioè} \quad f = 163 \text{ Hz}$$

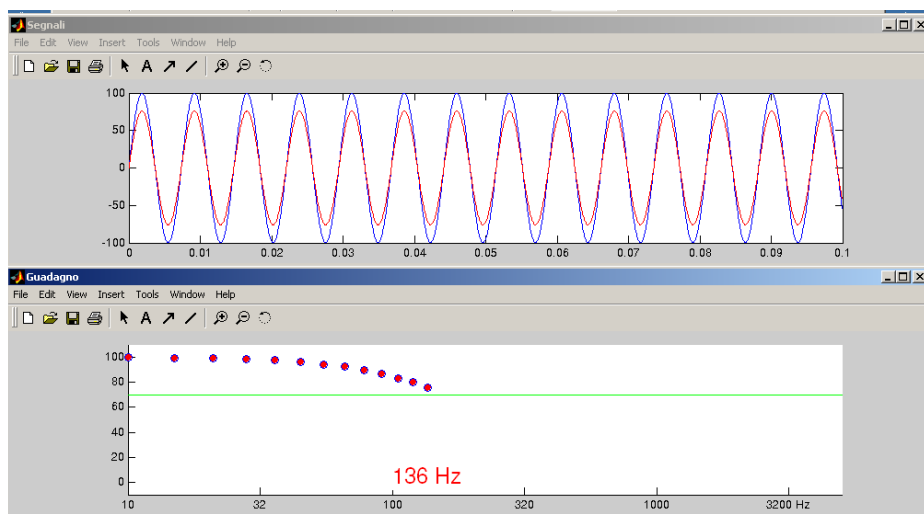
UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-basso (simulazione)



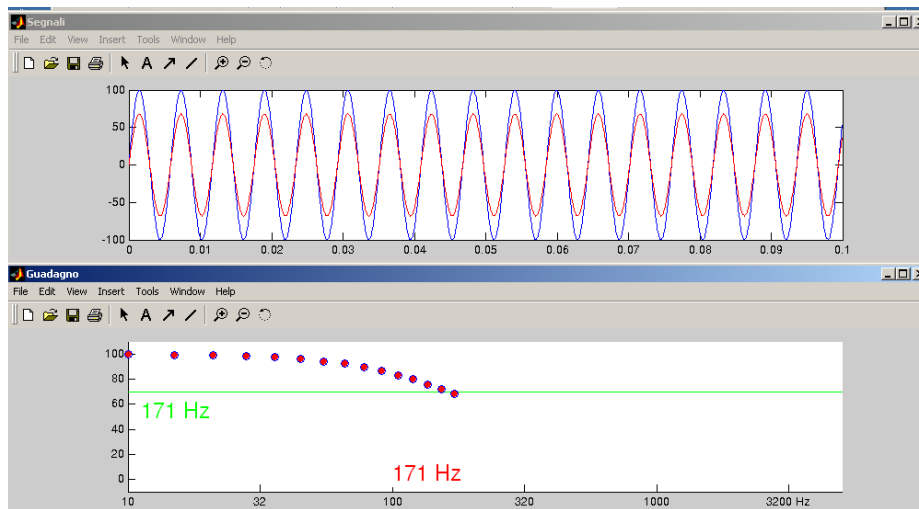
UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-basso (simulazione)



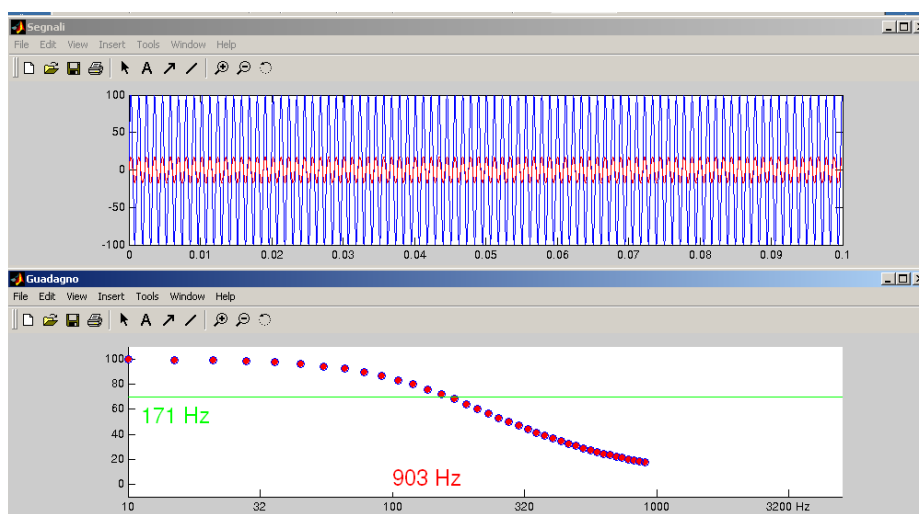
UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-basso (simulazione)



UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-basso (simulazione)

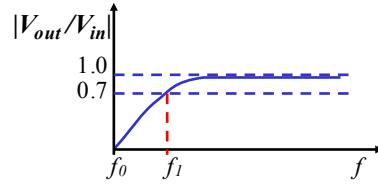
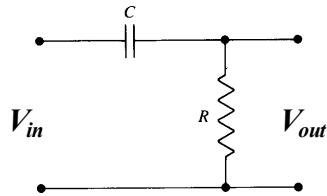


UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali



## Filtro passa-alto

*Filtro passa-alto*



$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 - j(1/\omega RC)}$$

$$G = (1 + j/\omega RC) / [(1 - j/\omega RC)(1 + j/\omega RC)]$$

$$G = (1 + j/\omega RC) / [1 + 1/(\omega RC)^2]$$

$$G = 1 / [1 + 1/(\omega RC)^2] + j(1/\omega RC) / [1 + 1/(\omega RC)^2]$$

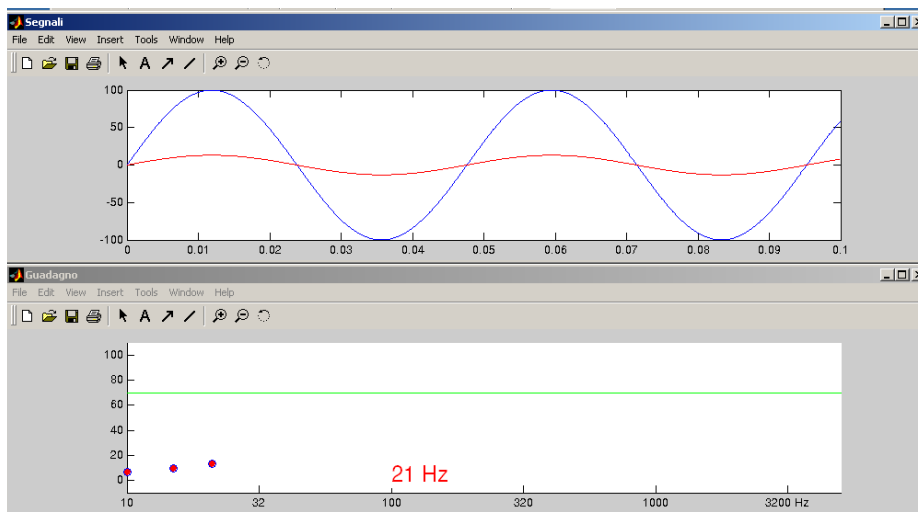
$$G = \{ 1 / [1 + (\omega RC)^2] \} (1 - j\omega RC)$$

$$|G| = \{ 1 / [1 + (\omega RC)^2] \} \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

$$|G| = |V_{out}/V_{in}| = 1 / \sqrt{1 + 1/(\omega RC)^2}$$

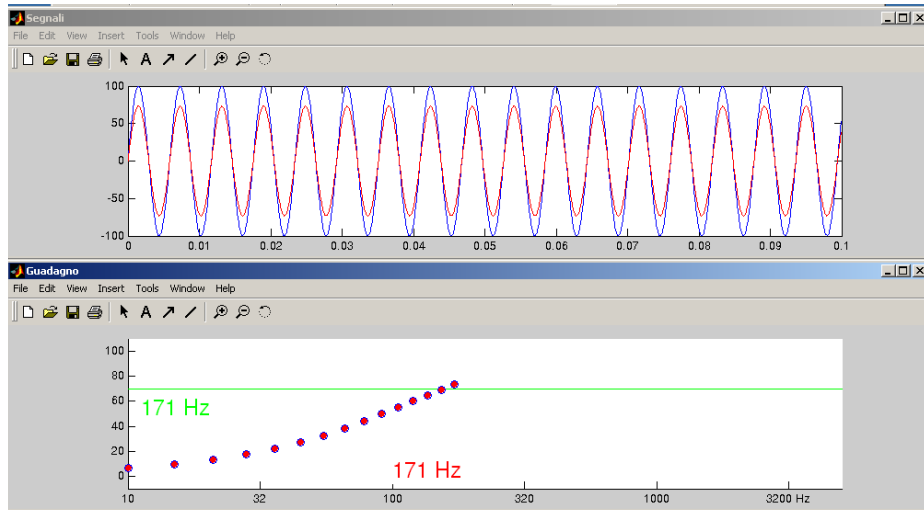
UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-alto (simulazione)



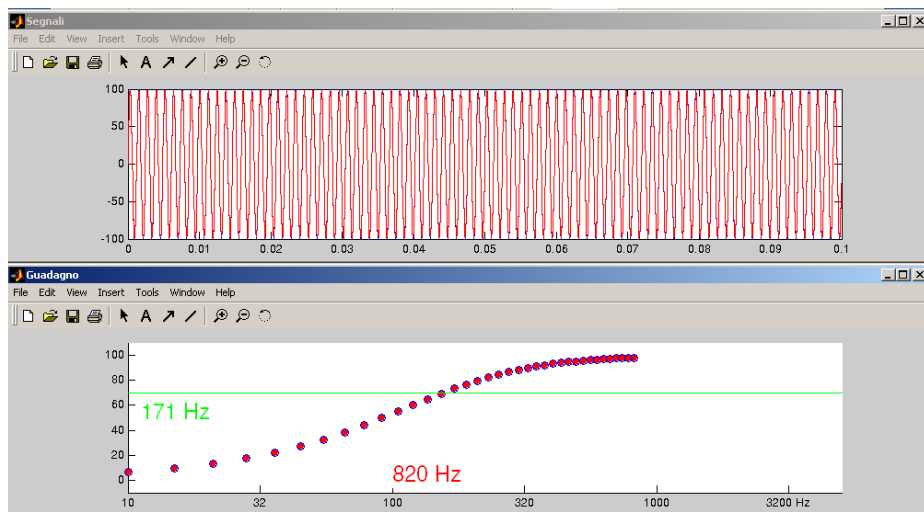
UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-alto (simulazione)



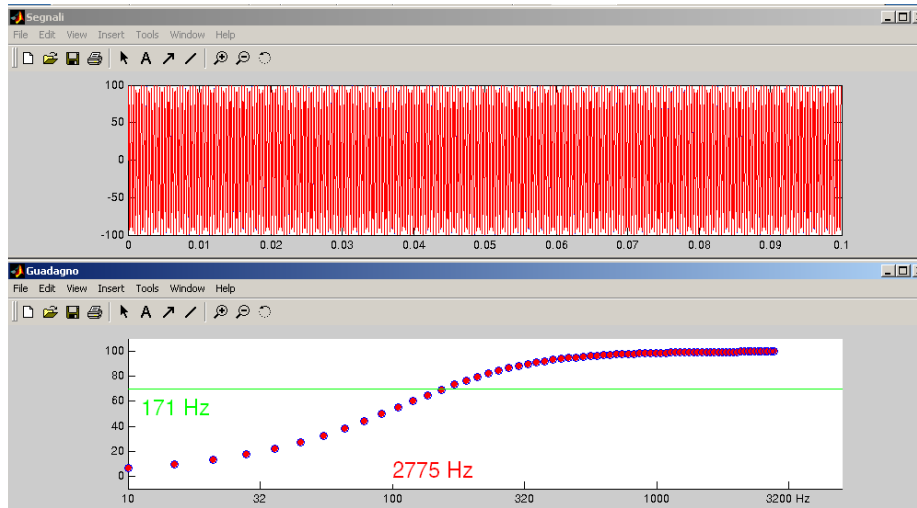
UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-alto (simulazione)



UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Filtro passa-alto (simulazione)

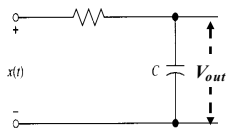


UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Alcune considerazioni sui Filtri RC

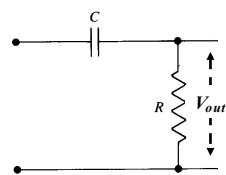
In modo molto grossolano possiamo dire che il Condensatore si comporta come un corto-circuito alle alte frequenze e come un interruttore aperto alle basse frequenze.

### Filtro passa-basso



Il segnale di uscita è preso ai capi del condensatore. Alle basse frequenze il condensatore è come non ci fosse e quindi tutta la tensione di ingresso (il segnale) si ritrova inalterato in uscita. Inversamente, per frequenze alte, il condensatore è come un corto-circuito, cioè avrà una tensione  $0$  ai suoi capi ( $V_{out} = Z_C I$ , ma  $Z_C = 0$  e quindi  $V_{out} = 0$ ).

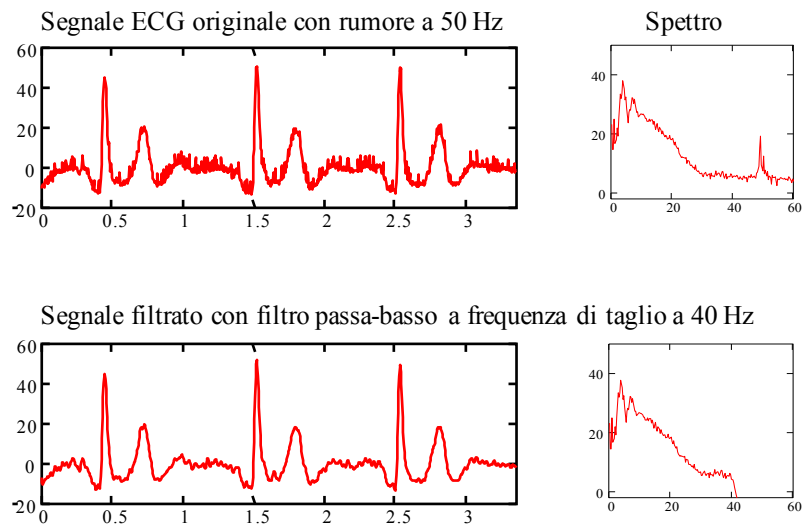
### Filtro passa-alto



Il segnale di uscita è preso ai capi della resistenza. Alle basse frequenze il condensatore è come non ci fosse; nel circuito non passa alcuna corrente ( $I=0$ ) e quindi la tensione ai capi della resistenza è  $V_{out} = RI = 0$ . Inversamente, per frequenze alte, il condensatore è un corto-circuito e tutto il segnale di ingresso si ritrova sulla resistenza.

UNIFI-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali

## Esempio: ECG con rumore



UNIP-SM-Filtri/Acquisizione/Elaborazione segnali