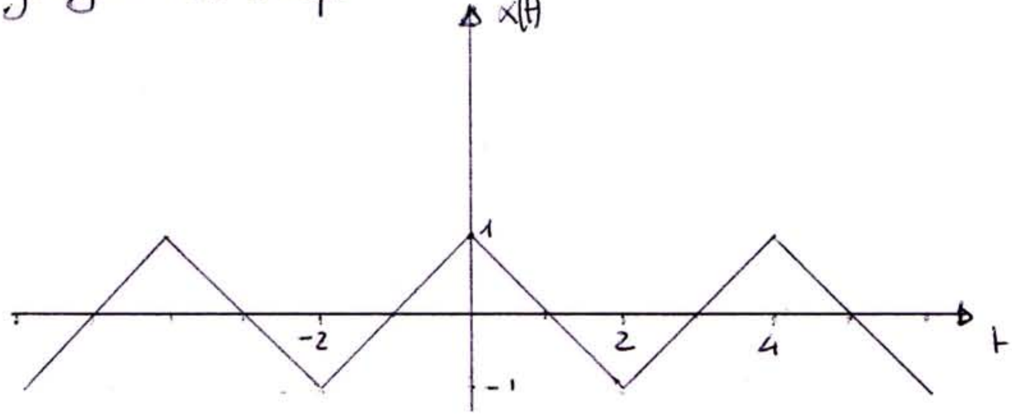
24/4/15 test 1

es.1

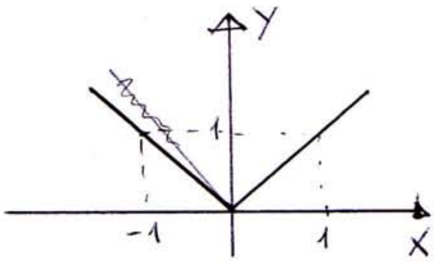
$x(t) = \text{rep}_4 \{g(t)\}$

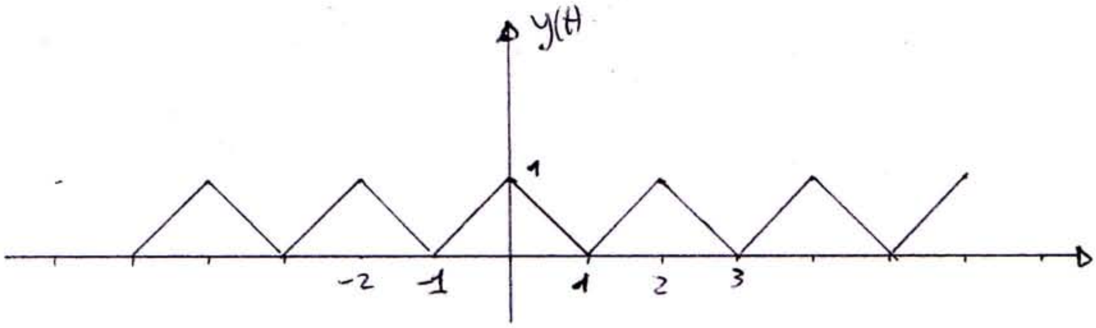
$$g(t) = \begin{cases} 1+t & -2 \leq t < 0 \\ 1-t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- grafico nel tempo



- uscita del seg. sistema con ingresso x(t)





- differenze frequenziali. Entrambi i segnali sono periodici $\Rightarrow$ spettro discreto

1- il primo segnale è periodico di periodo 4s $\Rightarrow$ le componenti sono multiple di $\frac{1}{4}$ Hz

- y(t) è periodico di periodo 2s $\Rightarrow$ componenti multiple di $\frac{1}{2}$ Hz

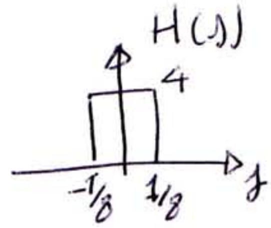
2) x(t) ha valore medio nullo
y(t) ha valore medio $\neq 0$ (è uguale a $\frac{1}{2}$)

3) l'ampiezza della componente fondamentale del segnale y(t) è inferiore a quella di x(t)
l'andamento a 0 per entrambi, del modulo dei coefficienti è $\propto \frac{1}{n^2}$,
essendo più ravvicinate le componenti di x(t) $\Rightarrow$ queste andranno a zero più velocemente di quelle di y(t)

calcolare l'uscita a $h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{4}\right)$

- è preferibile, in questo caso, usare un approccio in frequenza

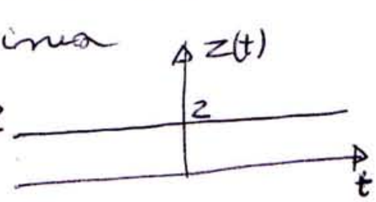
$$H(f) = 4\,\text{rect}(f4) = 4\,\text{rect}\left(\frac{f}{1/4}\right)$$



essendo le componenti frequenziali di y(t) centrate in 0 e nei multipli di $\frac{1}{2}$

si ha che l'unica possibile componente in uscita sia la componente per $f=0$ ovvero la continua

quindi l'uscita $z(t) = h(t) \otimes y(t) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$



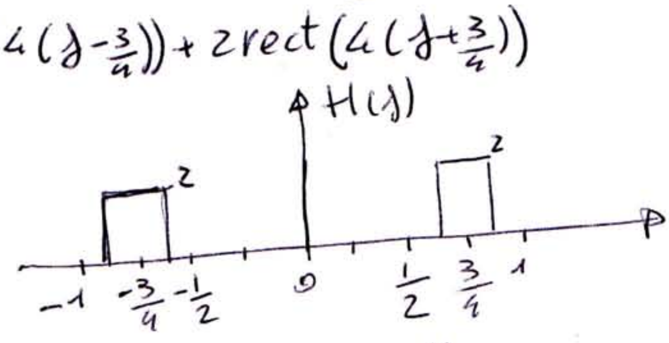
calcolare l'uscita a $h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)$

- anche in questo caso è preferibile usare un approccio in frequenza

per trovare H(f) uso il teorema della modulazione applicato al risultato del punto precedente

$$H(f) = 4\,\text{rect}(4f) \otimes \frac{\delta(f-\frac{3}{4}) + \delta(f+\frac{3}{4})}{2} =$$

$$= 2\,\text{rect}\left(4\left(f-\tfrac{3}{4}\right)\right) + 2\,\text{rect}\left(4\left(f+\tfrac{3}{4}\right)\right)$$



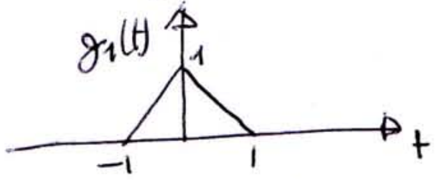
essendo le componenti di y(t) presenti in multipli di $\frac{1}{2}$ l'uscita è nulla

per completezza calcoliamo la trasformata di y(t) nel foglio seguente

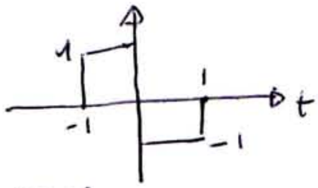
$\boxed{\text{N.B.}}$ si fa notare che se l'ultimo sistema fosse stato $h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{4}\right)\cos\left(2\pi\frac{K}{2}t\right)$ con K intero allora avrebbe selezionato la componente K-esima di y(t) e in uscita avremmo ottenuto un segnale sinusoidale

per lo sd. di questo compito la trasf. del segnale
poteva non essere calcolata

partiamo dalla trasformata del segnale aperiodico base di $y(t)$



derivo $g_1(t)$ $\quad g_2(t) = \dfrac{d g_1(t)}{dt}$



$g_2(t) = rect\left(t+\frac{1}{2}\right) - rect\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$$G_2(f) = sinc(f)\, e^{j2\pi f \frac{1}{2}} - sinc(f)\, e^{-j2\pi f \frac{1}{2}} =$$

$$= sinc(f)\, 2j \sin \pi f$$

dal teor. integrazione

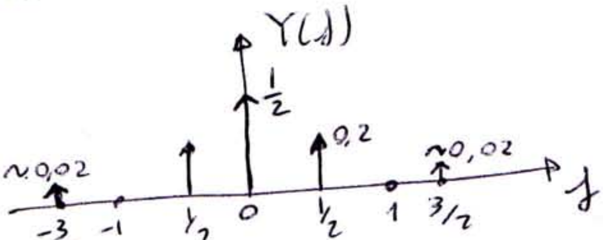
$$G_1(f) = sinc(f) \frac{2j \sin \pi f}{j 2\pi f} = sinc^2(f)$$

ottengo i coeff. dello sviluppo in serie di Fourier di $y(t)$

$$Y_n = \frac{1}{T_0} G_1\left(\frac{n}{T_0}\right) \qquad T_0 = 2 \qquad Y_n = \frac{1}{2} sinc^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

posso anche scrivere la $Y(f)$ come

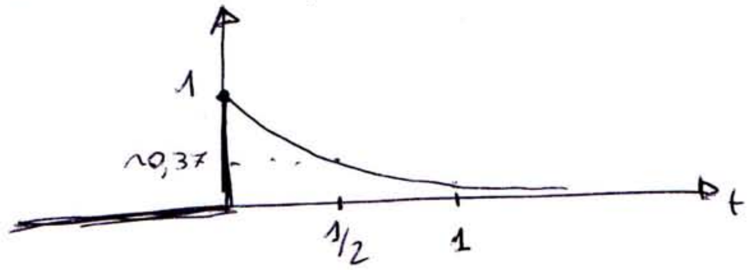
$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} sinc^2\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{2}\right)$$



esercizio 2

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad \text{con } \alpha = 2$$

- grafico nel tempo



il segnale non sembrerebbe limitato in banda (basta osservare la brusca variazione in t=0)

facciamo un analisi in freq.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(2+j2\pi f)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2+j2\pi f} e^{-(2+j2\pi f)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$|X(f)| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2 f^2}} \qquad \angle X(f) = -\mathrm{atg}\, \pi f$$

il segnale non è limitato in Banda quindi avremo sempre il fenomeno di aliasing

- visto che $|X(f)|$ al crescere di f tende a 0 (per $f \gg 0$ come $\frac{1}{f}$) possiamo campionare con un tempo di campionamento piccolo in modo da portare il fenomeno di sovrapposizione delle code a livelli "accettabili" (nella pratica questo dipenderà dalla applicazione)

se ad esempio scegliamo $f_c = 2\alpha = 4$ avremo che l'influenza della prima replica in frequenza per $f = \frac{f_c}{2}$ sarà pari a 0,0786

della terza replica pari a 0,0265

nel grafico NON è mostrata la somma delle repliche se aumentassimo $f_c = 10$ avremmo un effetto della prima replica a $f = \frac{f_c}{2}$ pari a 0,0318

N.B. il punto corrispondente a $\frac{f_c}{2}$ è quello nel quale l'effetto dell'aliasing, in questo segnale il cui spettro è monotono decrescente, è maggiore

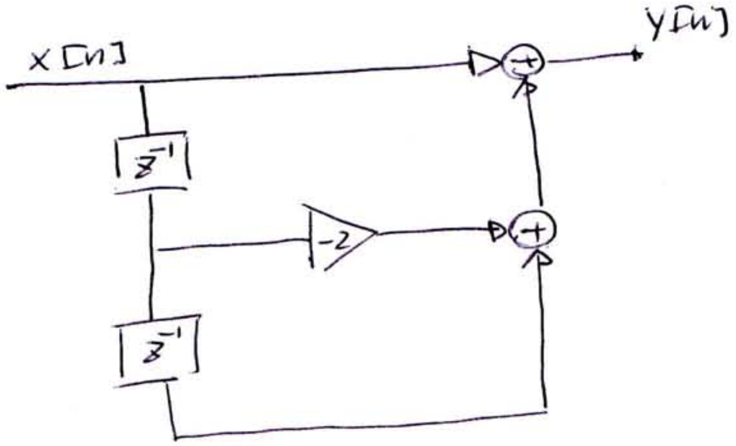
è inoltre possibile filtrare con un filtro passa basso il segnale prima del campionamento

idealmente il filtro dovrebbe avere una forma in frequenza tale da avere guadagno costante in banda passante, banda di transizione nulla e guadagno nullo in banda attenuata (una rect in frequenza)
In questo caso la frequenza di taglio potrebbe essere pari a $\frac{f_c}{2}$

Visto che ciò non è possibile, e la banda di transizione è $\neq 0$, si dovrà scegliere il filtro con attenzione in modo da garantire una rimozione efficace delle componenti superiori a $f_c/2$. È buona norma [redacted] scegliere la frequenza di taglio inferiore alla freq. di Nyquist ($\frac{f_c}{2}$) in modo tale che il guadagno del filtro alla $\frac{f_c}{2}$ sia piccolo "quanto basta" (di 40/60/80dB dipende dall'applicazione).
L'effetto di un filtro passa basso, sul segnale visto, si farebbe sicuramente sentire maggiormente nella parte iniziale ove è presente il brusco passaggio ad esempio

essendo il tempo di salita aumentato, sarà più semplice campionarlo a frequenze più basse.

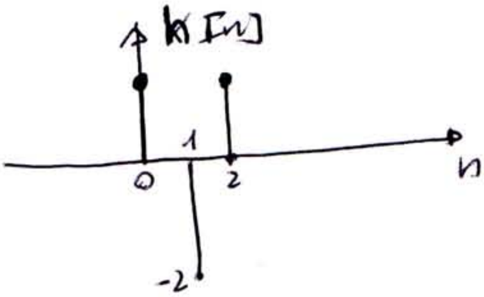
$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$

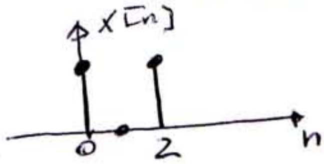


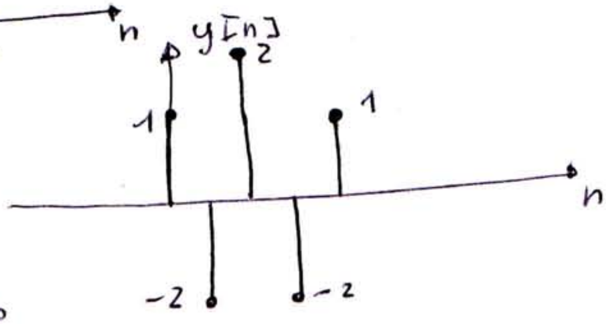
$x[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n-2] - 2\delta[n-1] - 2\delta[n-3] + \delta[n-2] + \delta[n-4] =$$
$$= \delta[n] - 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

si può anche fare la convoluzione tra $h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$ e $x[n]$







- Per calcolare l'uscita ad un ingresso qualsiasi, dato il filtro descritto

1) $y = conv([1\ -2\ 1], x)$

2) $y = filter([1\ -2\ 1], 1, x)$

3) (dato un vettore in ingresso x di lunghezza N)
convoluzione circolare risolta in frequenza

$X = fft(x, N+2)$ dove $h = [1\ -2\ 1]$
$H = fft(h, N+2)$
$y = ifft(X.*H)$