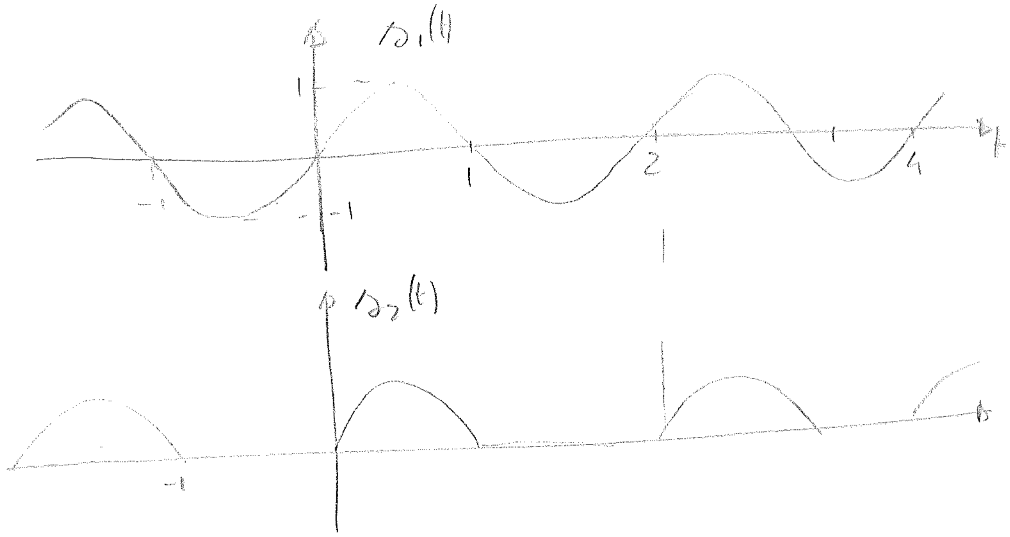
ES.1 270

$$s_1(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)$$

$$s_2(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{se } s_1(t) \geq 0 \\ 0 & \text{se } s_1(t) < 0 \end{cases} \qquad T_0 = 2s$$



quante componenti

$s_1(t)$ 2 comp.

$s_2(t)$ infinite

quali comp.

$s_1(t)$ $\quad +f_0 = \frac{1}{T_0} \quad -f_0 = -\frac{1}{T_0}$

$s_2(t)$ $\quad 0,\ \frac{n}{T_0}$ con $n \in \mathbb{Z}$

quanti modi

Trasf. continua di Fourier

Sviluppo in Serie di Fourier

$$s_2(t) = \text{rep}_{T_0}\Big[\underbrace{s_1(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t - T_0/4}{T_0/2}\right)}_{s_3(t)}\Big] \Rightarrow S_{2,n} = \frac{1}{T_0} S_3\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

con $S_3(f) = \mathcal{F}_c[s_3(t)]$

$$S_3(f) = \left(\frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j}\right) \otimes \frac{T_0}{2}\,\text{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right) e^{-j2\pi f\frac{T_0}{4}} =$$

$$= \frac{T_0}{4j}\,\text{sinc}\left((f-f_0)\frac{T_0}{2}\right) e^{-j\pi(f-f_0)\frac{T_0}{2}} - \frac{T_0}{4j}\,\text{sinc}\left((f+f_0)\frac{T_0}{2}\right) e^{-j\pi(f+f_0)\frac{T_0}{2}}$$

$$S_{2,n} = \frac{1}{4j}\,\text{sinc}\left(\frac{n-1}{2}\right) e^{-j\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)} - \frac{1}{4j}\,\text{sinc}\left(\frac{n+1}{2}\right) e^{-j\pi\frac{n+1}{2}}$$

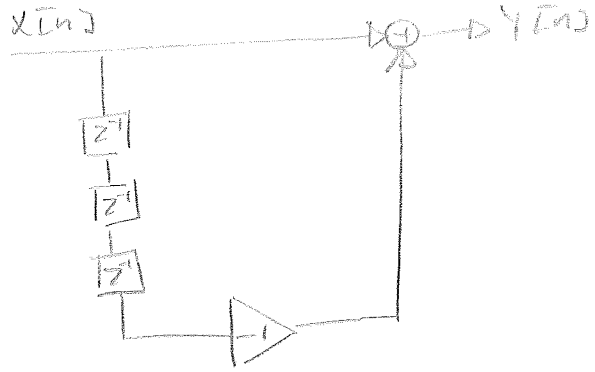
$$S_{2,0} = \frac{1}{\pi}$$

$$S_{2,1} = \frac{1}{4j} = -\frac{j}{4} \qquad S_{2,-1} = \frac{j}{4}$$

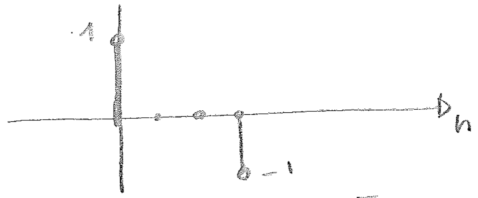
$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{j}{4} e^{-j2\pi\frac{t}{2}} - \frac{j}{4} e^{j2\pi\frac{t}{2}} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(\pi t)$$

ES.2_270

$y[n] = x[n] - x[n-3]$

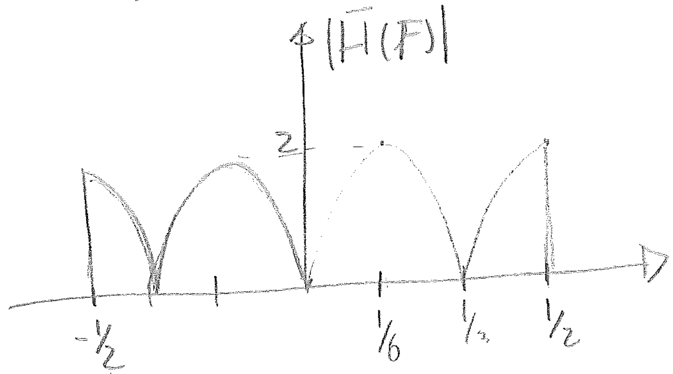


$h[n] = \delta[n] - \delta[n-3]$



$$\overline{H}(F) = 1 - e^{-j6\pi F} = e^{-j3\pi F}\left(e^{j3\pi F} - e^{-j3\pi F}\right) = 2j\sin 3\pi F \, e^{-j3\pi F}$$

$$|\overline{H}(F)| = 2|\sin 3\pi F|$$

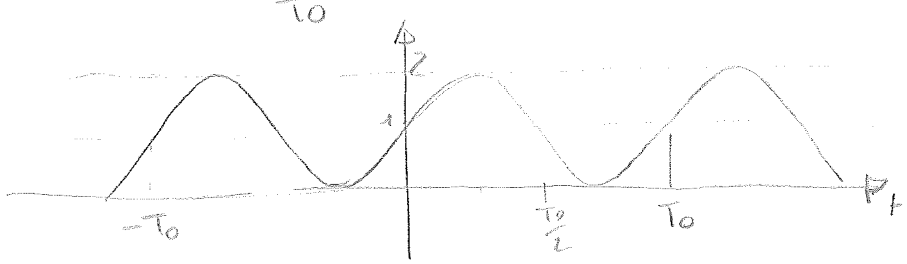


$$x[n] = 1 + \cos\frac{\pi n}{6} + 2\cos\frac{\pi n}{3}$$

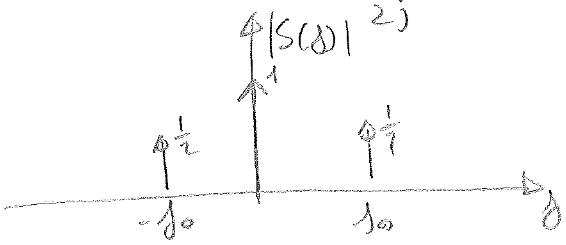
$$y[n] = 1 + \cos\frac{\pi n}{6} + 2\cos\frac{\pi n}{3} - 1 - \cos\frac{\pi(n-3)}{6} - 2\cos\frac{\pi(n-3)}{3}$$ → da sviluppar.

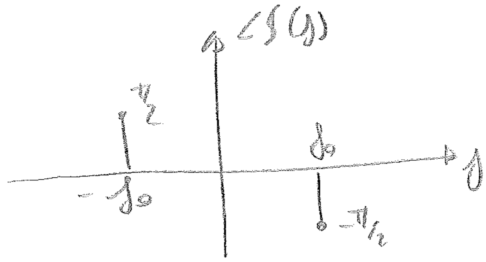
- è possibile utilizzare anche approccio in frequenza.

$s(t) = 1 + \sin \frac{2\pi t}{T_0}$

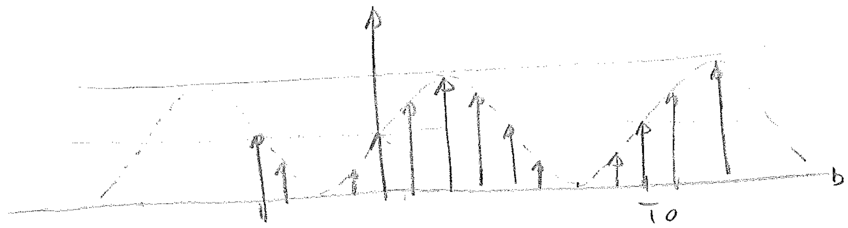


$$S(f) = \delta(f) + \frac{\delta(f-f_0)}{2j} - \frac{\delta(f+f_0)}{2j} = \delta(f) + \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2}\delta(f-f_0) + \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{2}\delta(f+f_0)$$





$$s_p(t) = s(t)\cdot \mathrm{rep}_{\frac{T_0}{8}}\left(\delta(t)\right) = s(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t - k\frac{T_0}{8}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{kT_0}{8}\right)\delta\left(t-\frac{kT_0}{8}\right)$$



- il segnale $s_p(t)$ è una rappresentazione del campionamento di $s(t)$, con $T = \frac{T_0}{8}$

  possiamo considerare $\bar{S}_p(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right)$ (*)

- il segnale $s_p(t)$ è equivalente ad una sequenza periodica $s_1[n] = 1 + \sin\frac{\pi n}{4}$

  possiamo studiarlo con la TF di una sequenza, grazie all'introduzione della $\delta(f)$ e in un periodo tale TF è

$$\bar{S}_1(f) = \delta(f) + \frac{1}{2j}\delta\left(f - \frac{1}{8T}\right) - \frac{1}{2j}\delta\left(f + \frac{1}{8T}\right)$$

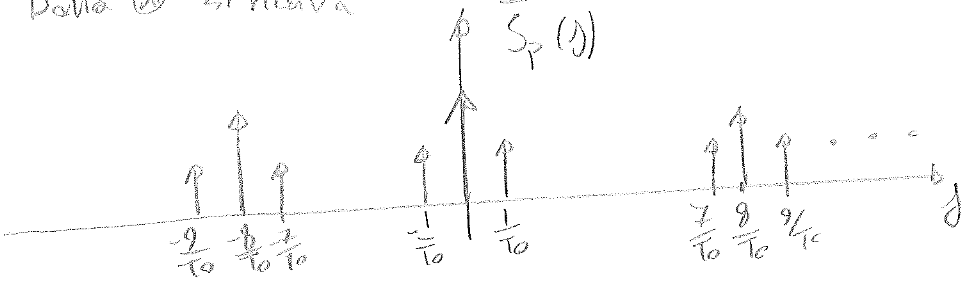
dove $T = \frac{T_0}{8}$ è il tempo di campionamento

la $\bar{S}_1(f)$ è periodica di periodo $\frac{1}{T} = \frac{8}{T_0}$

Si può usare la TDF della sequenza periodica equivalente $s_1[n]$

$$\tilde{S}_{1,k} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} s_1[n]\, e^{-j2\pi\frac{nk}{8}}$$

Dalla ⊛ si ricava



1) $y(t) = e^{-\alpha t} u(t) \otimes x(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

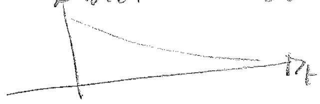
↑

questa è analoga a $y(t) = h(t) \otimes x(t)$

$h(t)$ può essere una risposta impulsiva perché è causale ed è assolutamente integrabile $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$

si fa notare che $e^{-\alpha t} u(t)$ è una funzione nota e spesso studiata

$h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$



quindi il sistema 1) è LTI

supponiamo di volerlo dimostrare

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Linearità

$x_1(t) \to y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau$

$x_2(t) \to y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$ con a, b costanti

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_3(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, (a x_1(t-\tau) + b x_2(t-\tau))\, d\tau =$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau + b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau = ?$$

Tempo invarianza

$x_1(t) \quad y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau = e^{-\alpha t} u(t) \otimes x_1(t)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \quad y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, x_1(t-t_0-\tau)\, d\tau =$

$$= e^{-\alpha (t-t_0)} u(t-t_0) \otimes x_1(t-t_0) = y_1(t-t_0) \Rightarrow \text{T.I.}$$

2) $y(t) = \sin(20\pi t)\, x(t)$

Lineare?

$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \sin(20\pi t) x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \sin(20\pi t)\, x_2(t)$

$x_3 = a x_1 + b x_2 \rightarrow y_3 = \sin(20\pi t)\, x_3(t) = a \sin 20\pi t\, x_1(t) + b \sin 20\pi t\, x_2(t)$

è Lineare

Si dimostra facilmente che è Tempo Variante

quindi non possiamo definire la risposta impulsiva e la $H(f)$

Comportamento in frequenza

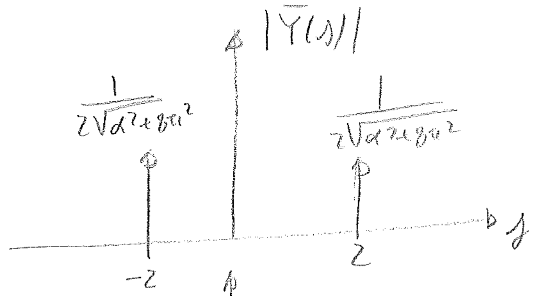
1) $$H(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

2) $$Y(f) = \frac{X(f-f_0)}{2j} - \frac{X(f+f_0)}{2j}$$

nascono componenti che non erano presenti precedentemente

(dal teorema della modulazione)

uscita a $\sin 4\pi t$



1) $$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+8\pi^2}} \sin\left(4\pi t - \mathrm{atg}\,\frac{4\pi}{\alpha}\right)$$

2) $y(t) = \sin(20\pi t) \sin 4\pi t$

ES C

— Discutere Significato e uso Sviluppo in Serie

— Spiegare Significato Base di Fourier

questo è sufficiente

→ Segnali Reali

$S_n = S_{-n}^*$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} + j\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} + j\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0}$$

$\Rightarrow$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} = R_0+\sum_{n=1}^{\infty} 2R_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2I_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0}$$

Segnali Immaginari Puri

$\Downarrow$

$S_n = -S_{-n}^*$

$R_n = -R_{-n}$

$I_n = I_{-n}$

$$x(t) = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} + j\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} = 2j\sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} + jR_0 + 2j\sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0}$$

segnali pari

$S_n = S_{-n}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} + j\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} = R_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} + jI_0 + 2j\sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0}$$

Segnali dispari

$S_n = -S_{-n}$

$$x(t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} + j\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} = -2\sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0} + 2j\sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0}$$

$s(t) = \sin 2\pi t$

$\Downarrow$

due componenti

$f_1 = 1$ e $f_2 = -1$

$s_1(t) = |\sin 2\pi t|$

$\downarrow$

infinite componenti

$S_{1,0} \neq 0$ visto che il valore medio è $\neq 0$

le altre a frequenza $2K$ dove $f_0 = 2$ è la frequenza fondamentale