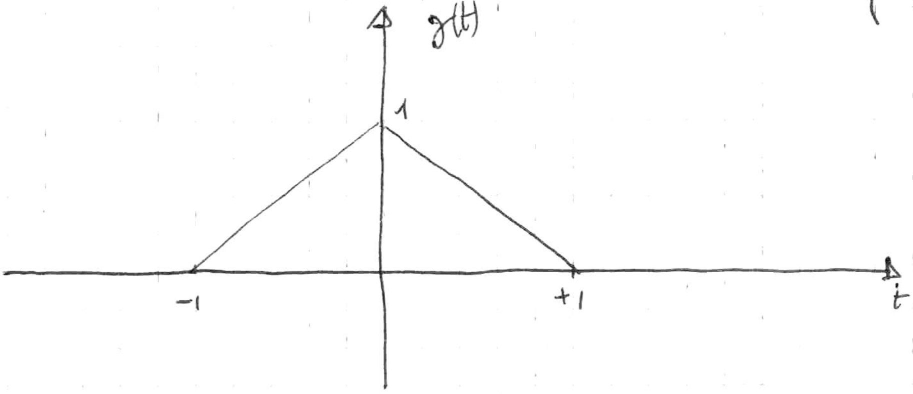
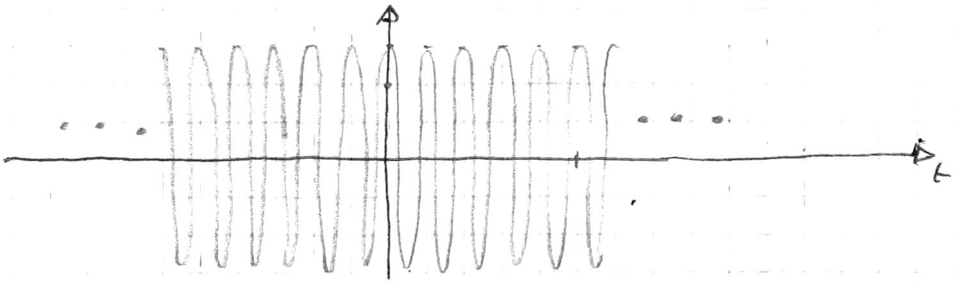
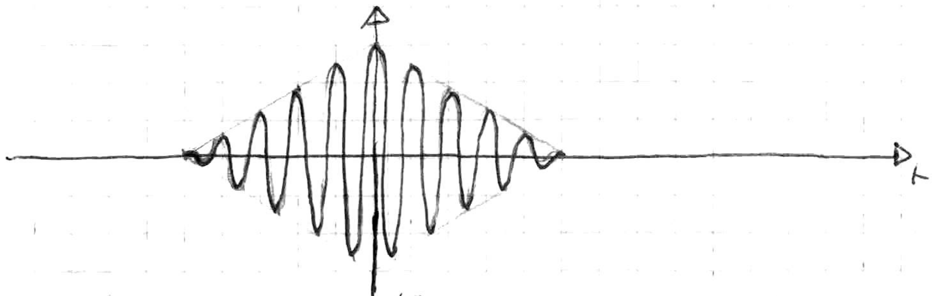
Es1. 17/09/13 test#1

$$y(t) = g(t) \cos(10\pi t) \qquad \text{con } g(t) = \begin{cases} 1+t & \text{per } -1 \le t < 0 \\ 1-t & \text{per } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$







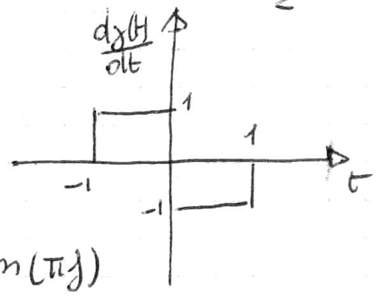
$$Y(f) = G(f) \otimes \left(\frac{\delta(f-5) + \delta(f+5)}{2} \right) = \frac{G(f-5) + G(f+5)}{2}$$

N.B.

La relazione precedente si può ricavare dal teorema della modulazione o dal teorema del prodotto considerando $\mathcal{F}[\cos(10\pi t)] = \dfrac{\delta(f-5) + \delta(f+5)}{2}$

Trovo $G(f)$

considero $g'(t) = rect\left(\dfrac{t+\frac{1}{2}}{1}\right) - rect\left(\dfrac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) = s(t)$



$$S(f) = sinc(f) e^{j\pi f} - sinc(f) e^{-j\pi f} = sinc(f)\, 2j \sin(\pi f)$$

dal teorema dell'integrazione, visto che $S(0) = 0$

$$G(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f} = \frac{sinc(f)\, 2j \sin(\pi f)}{2j\, \pi f} = sinc^2(f)$$

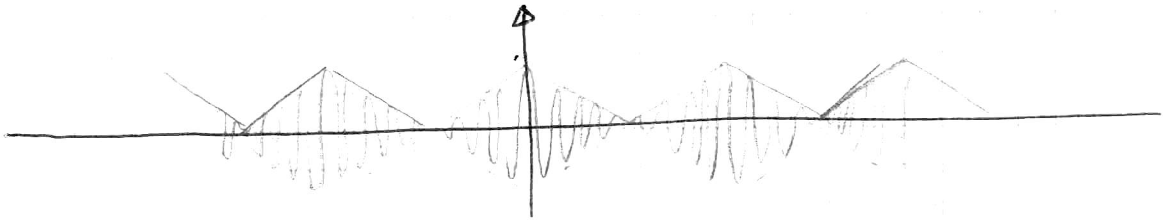
$$Y(f) = \frac{sinc^2(f-5) + sinc^2(f+5)}{2}$$

se consideriamo il segnale $y(t) = g(t)\cos(20\pi t)$
si deve notare che la trasformata vale

$$Y(f) = \frac{\text{sinc}^2(f-10) + \text{sinc}^2(f+10)}{2}$$

Le due sinc² in frequenza sono collocate attorno alle frequenze ±10 Hz. In effetti il secondo segnale varia nel tempo più velocemente e quindi avrà un contenuto alle alte frequenze maggiore.

$$s(t) = y(t) \otimes \sum_{K=\infty}^{\infty} \delta(t-2k) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} g(t-2k)\cos(10\pi(t-2k))$$



Il segnale è periodico, soddisfa le condizioni di Dirichlet

$$S_n = \frac{1}{T_0} Y\left(\frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}-5\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}+5\right)}{2}$$

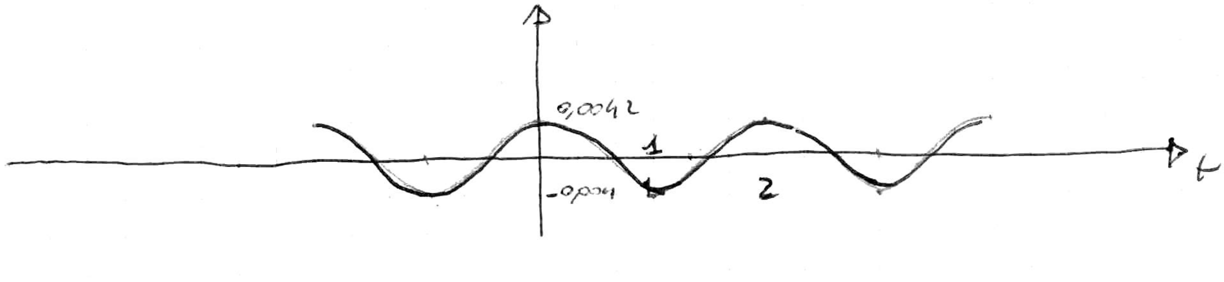
$$S_0 = \frac{\text{sinc}^2(-5) + \text{sinc}^2(+5)}{4} = 0$$

$$S_1 = \frac{1}{4}\left[\text{sinc}^2\left(\frac{1}{2}-5\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{1}{2}+5\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\text{sinc}^2(-4{,}5) + \text{sinc}^2(5{,}5)\right] = 0{,}0021$$

$S_{-1} = S_1$ (segnale Reale e pari)

ricostruisco considerando solo la fondamentale e la continua

$$\hat{s}(t) = 0{,}0021\, e^{j2\pi\frac{t}{2}} + 0{,}0021\, e^{-j2\pi\frac{t}{2}} = 0{,}0021 \cdot 2\cos(\pi t) = 0{,}0042\cos(\pi t)$$



Es. 2

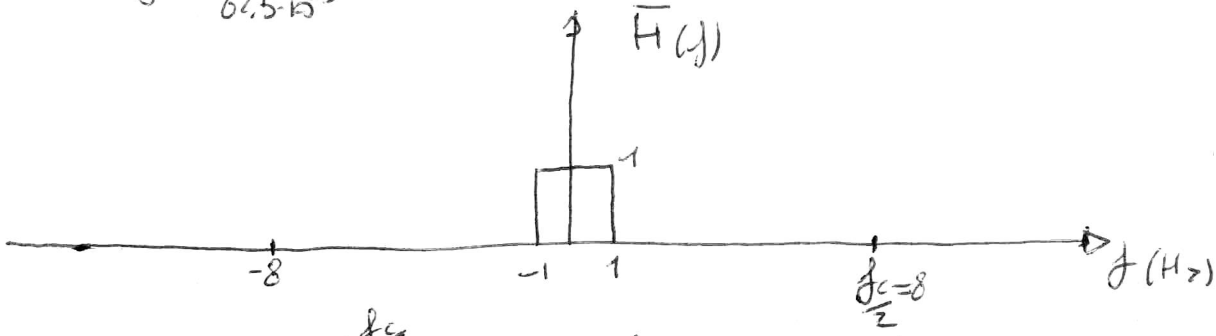
Filtro passa basso ideale

Frequenza di taglio 1 Hz

Tempo campionamento 62,5 ms

$T = 62{,}5 \cdot 10^{-3}$ s

$$f_c = \frac{1}{62{,}5 \cdot 10^{-3}} = 16 \text{ Hz}$$



$$h[n] = \frac{1}{f_c} \int_{-\frac{f_c}{2}}^{\frac{f_c}{2}} \overline{H}(f)\, e^{j2\pi n f T}\, df = \frac{1}{16} \int_{-1}^{1} e^{j2\pi n f T}\, df =$$

$$= \frac{1}{16} \frac{1}{j2\pi n T} e^{j2\pi n f T} \Big|_{f=-1}^{1} = \frac{1}{16} \frac{1}{j2\pi n T} \left(e^{+j2\pi n T} - e^{-j2\pi n T}\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \frac{1}{j2\pi n T} 2j \sin(2\pi T n) = \frac{1}{16} \frac{1}{j2\pi n \frac{1}{16}} 2j \sin\left(\frac{2\pi n}{16}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)}{\pi n}$$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{8}\right)$$

- uscita

1) $x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-5]$

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \frac{1}{8} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{8}\right) + - \frac{1}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{n-5}{8}\right)$$

2) $x[n] = 5$

nel tempo

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 5\, h[k] = 5 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]$$

è una costante

altrimenti, in frequenza

$x[n] = 5$ $\quad \overline{X}(f) = 5\,\delta(f)$

$$\overline{Y}(f) = \overline{X}(f)\, \overline{H}(f) = 5\,\delta(f) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = = 5 \operatorname{rect}(0)\, \delta(f) = 5\,\delta(f)$$

da cui $y[n] = 5$

N.B. possiamo quindi dire che $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{8} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{8}\right) = 1$

$$x[n] = \sin\left[\frac{2\pi n}{32}\right] + \cos\left[\frac{2\pi n}{8}\right]$$

$$\bar{X}(f) = \frac{\delta\left(f - \frac{1}{32T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{32T}\right)}{2j} + \frac{\delta\left(f - \frac{1}{8T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{8T}\right)}{2}$$

$$f_1 = \frac{1}{32T} = \frac{1}{2}\ Hz \qquad f_2 = \frac{1}{8T} = 2\ Hz$$

quindi se moltiplichiamo le 4 delta per una vect non nulla solo tra -1 e 1 Hz abbiamo

$$\bar{Y}(f) = \bar{X}(f)\, \text{vect}\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2j}\, \text{vect}\left(\frac{1}{32T\cdot 2}\right) \delta\left(f - \frac{1}{32T}\right) - \frac{1}{2j}\, \text{vect}\left(\frac{-1}{32T\cdot 2}\right) \delta\left(f + \frac{1}{32T}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \underbrace{\text{vect}\left(\frac{1}{8T\cdot 2}\right)}_{0} \delta\left(f - \frac{1}{8T}\right) + \frac{1}{2}\, \underbrace{\text{vect}\left(-\frac{1}{8T\cdot 2}\right)}_{0} \delta\left(f - \frac{1}{8T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\, \delta\left(f - \frac{1}{32T}\right) - \frac{1}{2j}\, \delta\left(f + \frac{1}{32T}\right)$$

$$y[n] = \sin \frac{2\pi n}{32}$$

Il sistema è non causale.

Per renderlo causale possiamo moltiplicare la $h[n]$ per una finestra. Se la finestra è simmetrica rispetto a $n=0$, visto che lo è anche la $h[n]$, possiamo garantire una fase lineare in frequenza del filtro.

Successivamente è possibile traslare la risposta ottenuta in modo che $h[n] = 0$ per $n < 0$

Esercizio 3

1) $$s(t) = 5 + \sum_{k\neq 0,\, k=-3}^{3} \frac{1}{k^2} e^{j\frac{\pi k t}{3}} + \sum_{k\neq 0,\, k=-5}^{5} \frac{j}{k} e^{j\frac{\pi k t}{2}}$$

la frequenza massima è corrispondente a $K=5$ e $K=-5$ del terzo elemento

infatti $f_5 = \frac{5}{4} = 1,25\ Hz \Rightarrow f_c \geq 2,5\ Hz$

2) Se reso periodico il segnale è una sinusoide discreta le componenti che servono sono $\underline{\underline{2}}$

3) 

Abbiamo una sequenza periodica di periodo $N_0=10$

le frequenze sono $f_K = \frac{K}{N_0 T}$ oppure $F_K = \frac{K}{N_0}$ con $K=0,1,\dots,9$

N.B. $\tilde{X}_K$ sono periodici quindi sono ok anche $K=-5,-4,\dots,4$

l'unica componente che ha frequenza multipla della fondamentale è

$$A e^{j\frac{3\pi n}{5}} = A e^{j2\pi n\frac{3}{10}}$$

4) $y(t) = \mathrm{sinc}(10t)\cos(200t)$

$$Y(f) = \frac{1}{10}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-100}{10}\right) + \frac{1}{10}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+100}{10}\right)$$

quindi l'occupazione di banda è tra 95 e 105 Hz

N.B. Visto che $y(t)$ è reale si sottointende che sono occupate anche le frequenze tra -105 e -95 Hz