16/11/07
5

Valore medio e varianza

Indici che riassumano principali aspetti della legge di distribuzione

Variabile disreta

$$E\{X\} \triangleq \sum_i x_i p_i = \eta_x \qquad \text{Expectation}$$

Potrebbe non coincidere con alcun valore di X. Indice di posizione.

Definizione frequentista

evento $\{X = x_i\}$ la sua frequenza $\frac{n_i}{n}$ $\qquad \eta_x \simeq \sum_i \frac{n_i x}{n}$

Varianza

$$\sigma^2_x = E\{(X-\eta_x)^2\} = \sum_i (x_i - \eta_x)^2 p_i$$

deviazione standard

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2_x}$$

Variabile continua

$$E\{X\} \triangleq \eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$E\{(X-\eta_x)^2\} \triangleq \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 f(x)\, dx$$

Teorema dell'aspettazione (6K)

Se Y è una variabile casuale funzione di un altra variabile X, cioè se $Y = g(X)$ non serve passare per la legge di distribuzione di Y

caso X, Y discrete

$$E\{Y\} = \sum_{K} y_K \, P\{Y = y_K\}$$

il primo termine $y_1 \, P\{Y = y_1\} = y_1 \sum_{G(y_1)} P\{X = x_i\} = \sum_{G(y_1)} g(x_i) \, P\{X = x_i\}$

$G(y_1) = \{ x_i : g(x_i) = y_1 \}$

il secondo

$$y_2 \sum_{G(y_2)} P\{X = x_i\} = \sum_{G(y_2)} g(x_i) \, P\{X = x_i\}$$

siccome $G(y_i)$ sono partizioni di $\mathbb{R}$

$$E\{g(x)\} = \sum_{i} g(x_i) \, P\{X = x_i\}$$

Nel caso in cui X sia una variabile continua

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, f_X(x) \, dx$$

$E\{g(x) + c\} = E\{g(x)\} + c$

$E\{c\,g(x)\} = c\,E\{g(x)\}$

$E\{h(x) + g(x)\} = E\{h(x)\} + E\{g(x)\}$

16/11/07
⑥

Distribuzioni Continue (ok)

Variabile uniforme:

X uniforme nell'intervallo (a,b) con $X \in \mathcal{U}(a,b)$

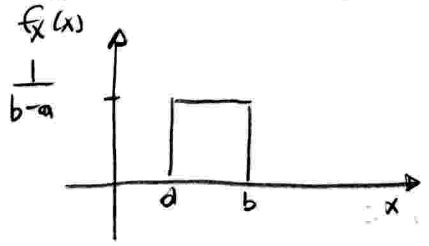
$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a<x<b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

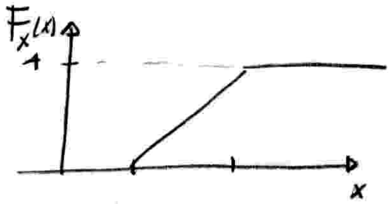
$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x-\eta_x)^2\} = E\{x^2+\eta_x^2-2\eta_x x\} = E\{x^2\} + E\{\eta_x^2\} - 2\eta_x E\{x\} =$$

$$= E\{x^2\} - \eta_x^2 = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} - \frac{b^2+a^2+2ab}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$





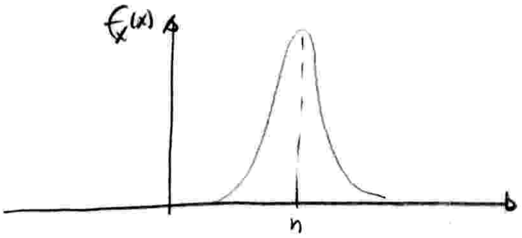
Variabili normali (o gaussiane)

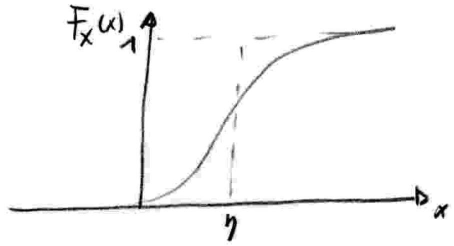
$X \in N(\eta, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \qquad \eta, \sigma^2 \text{ parametri della distribuzione}$$

Funzione di distribuzione

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx$$





16/11/07
7

ok Si consideri $Z = \dfrac{X-\eta_x}{\sigma_x}$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_x}\right)} f_x\left(\frac{x-\eta_x}{\sigma_x}\right) = \sigma_x \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

quindi anche essa normale con $\eta_z = 0$ $\sigma_z^2 = 1$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\exists$ tabelle che forniscono $\Phi(z)$ in funzione di z

è possibile stimare $P\{a \leq X \leq b\}$ con $X = \sigma_x Z + \eta_x$

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a \leq \sigma_x Z + \eta_x \leq b\} = P\left\{\frac{a-\eta_x}{\sigma_x} \leq z \leq \frac{b-\eta_x}{\sigma_x}\right\} =$$
$$= \Phi\left\{\frac{b-\eta_x}{\sigma_x}\right\} - \Phi\left\{\frac{a-\eta_x}{\sigma_x}\right\}$$

3.41 ok

peso nominale è 250 g

peso reale v.a. con η_x 250 . Calcolare σ se il 5% dei pacchetti pes. > 252 g.

Calcolare $P\{X < 245\}$

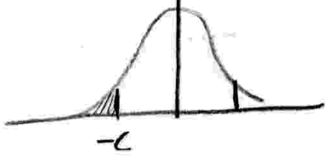
$P\{X > 252\} = 0{,}05$ $\qquad 0{,}95 = 1 - P\{X \leq 252\}$

$$0{,}05 = 1 - P\{X \leq \eta_x + 2\} = 1 - P\{X - \eta_x \leq 2\} =$$
$$= 1 - P\left\{\frac{x-\eta_x}{\sigma_x} \leq \frac{2}{\sigma_x}\right\} = \qquad Z = \frac{x-\eta_x}{\sigma_x}$$

$P\left\{z \leq \frac{2}{\sigma_x}\right\} = 0{,}95$ $\qquad \frac{2}{\sigma} = 1{,}6449 \Rightarrow \sigma = 1{,}2159$

no ↓ $P\{x \leq 245\} = P\{X - \eta \leq -5\} = P\left\{\frac{x-\eta}{\sigma} \leq \frac{-5}{1{,}2157}\right\} = \Phi(-4.11) = 1 - \Phi(4.11)$

visto che è simmetrica



-c

$\Phi(-c) = 1 - \Phi(c)$