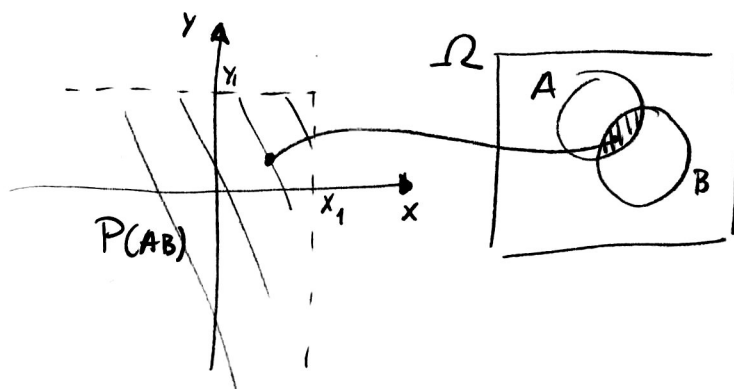


$X$  e  $Y$  costituiscono un vettore aleatorio che trasforma gli elementi di  $\Omega$  in punti del piano  $x, y$

eventi  $A = \{\omega : X(\omega) \leq x_i\}$

$B = \{\omega : Y(\omega) \leq y_j\}$



### Funzione di distribuzione congiunta

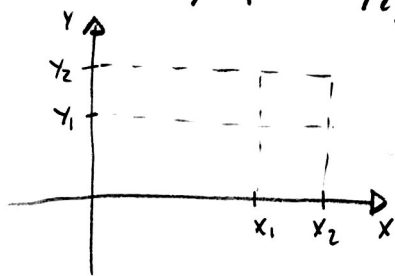
$$F_{XY}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

Proprietà:

-  $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$

-  $P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\} = F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y) \geq 0$

-  $P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$



-  $F_{XY}(-\infty, -\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0$

-  $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$   $\{X \leq \infty, Y \leq \infty\}$  evento certo

### Funzione di distribuzione marginale

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$$

visto che

$$\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \{X \leq x\}$$

$$\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$$

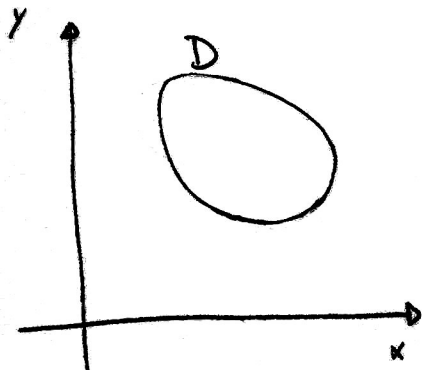
## Densità di probabilità congiunta (caso continuo)

27/11/07

$$f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$F_{XY}(x,y) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

visto che  $P\{\cdot\} \geq 0 \Rightarrow f_{XY}(x,y) \geq 0$



$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f_{XY}(x,y) dx dy$$

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{XY}(z,\eta) dz d\eta$$

$$P\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x f_{XY}(z,y) dz dy = F_X(x)$$

$$P\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,\eta) dx d\eta = F_Y(y)$$

## Densità di probabilità marginale

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f_{XY}(z,y) dz dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy$$

analogamente

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dx$$

## Densità di prob. condizionata della v.a. X supposto Y=y

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

nel caso della v.a. Y supposto X=x

$$f_Y(y|X=x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

## variabili indipendenti

27/11/07

eventi indipendenti  $P(A_1, A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

due v.a. si dicono statisticamente indipendenti se gli eventi  $\{X \leq x\} \{Y \leq y\}$  sono indipendenti, qualunque siano  $x$  e  $y$

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\}$$

$\Downarrow$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

v.a. continue

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_X(x) f_Y(y)$$

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

$$f_Y(y|X=x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

v.a. discrete

$$P\{X=x_i, Y=y_k\} = P\{X=x_i\} P\{Y=y_k\}$$

$$P\{X=x_i | Y=y_k\} = P\{X=x_i\}$$

$$P\{Y=y_k | X=x_i\} = P\{Y=y_k\}$$

**N.B.** v.a. continue

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E\{X\} E\{Y\}$$

v.a. discrete

$$E\{XY\} = \sum_i \sum_k x_i y_k P\{X=x_i, Y=y_k\} = \sum_i \sum_k x_i y_k P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_k\} = \\ = \sum_i x_i P\{X=x_i\} \cdot \sum_k y_k P\{Y=y_k\} = E\{X\} E\{Y\}$$