Esperimento

Evento: ogni fatto che può accadere

Spazio Campione (Ω): spazio dei possibili risultati
ciascun evento elementare, spazio degli eventi elem. S
evento composto, sottoinsieme di S

Esperimenti ripetuti

S spazio degli eventi elementari $n(S)$ numero di tali eventi

S^k spazio degli ev. el. ripetuto K volte $n(S^k)$

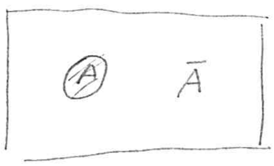
Notazione

A è uno degli eventi possibili di S (dell'esperimento) $A \subset S$

Diagramma di Venn

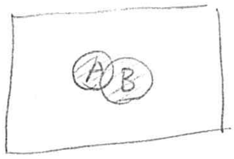
$\bar{A}$ è l'insieme complementare di A
l'insieme degli eventi di S che non appartengono ad A (NOT(A))

S



Unione

S



$A \cup B$ oppure $A+B$

$A \cup \bar{A} = S$ A OR B (non esclusivo)

Intersezione

S

$A \cap B$ (AND)

disgiunti: non hanno eventi in comune
($A \cap B = \emptyset$)

Differenza

$A - B$ elementi di A che non appartengono a B

Proprietà

commutative ($\cup$ e $\cap$) $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

associative $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributiva
dell'unione rispetto a intersezione (e vic.)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ unione rispetto inters.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ inters. rispetto unione

A e B disgiunti se $A \cap B = \emptyset$ (o mutuamente esclusivi)

n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ si dicono mutuamente esclusivi se $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

Cardinalità card(A) numero elementi di A

card(A) = ∞ infinito, la cardinalità di un insieme infinito si dice infinita Numerabile se gli infiniti elementi di A si possono porre in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$

Prodotto Cartesiano $A \times B$ di due elementi A e B, insieme i cui elementi sono le coppie ordinate ω_1, ω_2 con $\omega_1 \in A$ e $\omega_2 \in B$

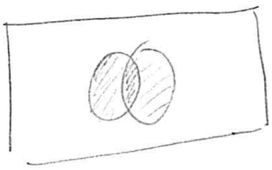
visto che sono ordinate $A \times B \neq B \times A$

se $A = B$ $A \times B \equiv A_2$ $R \times R = R_2$

Propr. associativa $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

leggi di de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



Approccio Assiomatico

Ω tutti i possibili eventi elementari

S spazio degli eventi riferiti all'esperimento

P probabilità come funzione: (assiomi di Kolmogorov)

- $P(A) \geq 0$ $\forall$ evento $A \in S$ non negatività
- $P(S) = 1$ evento certo (assioma di normalizzazione)
- se $A \cap B = 0$ eventi mutuamente esclusivi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  (assioma di numerabile additività)

Analogia tra probab. e misura

Usiamo i diagrammi di Venn: probabilità di un insieme A con l'area della superficie

per cui per l'assioma di normalizzazione Ω ha area $= 1$.

$P(\emptyset) = 0$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Teorema probab. totali (No Regola additiva)

se A e B mut. esclusivi $P(A \cap B) = 0$

Probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ teorema probabilità composte $P(B) \neq 0$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} , P(A) \neq 0$$

Regola di moltiplicazione

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$ se $P(B) \neq 0$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A)\ P(A)$$ $P(A) \neq 0$

Due eventi A e B sono indip. se

$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A|B) = P(A)$$

Quindi

Regola di moltiplicazione diviene

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(A)\,P(B)$$

Teorema di Bayes

Teor. prob. totale   A e $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ famiglia di eventi S

uno e uno solo di essi si verifichi

$B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j$ mut. esclusivi

$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$ esaustivi

$P(B_i) \neq 0 \quad \forall i$

$$P(A) = A(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)\,P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)$$

Teorema Bayes

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\,P(B_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)\,P(B_i)} \quad \leftarrow P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A) = P(A|B)\,P(B) \qquad P(B/A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$