La variabile aleatoria è una funzione che associa la classe degli eventi allo spazio dei numeri reali

$$X : S \longrightarrow R$$

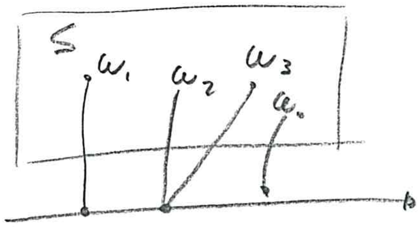
X associa ad ogni risultato dell'esperimento ω un numero reale x

X è una variabile aleatoria o casuale, se:

a) $X(\omega)$ è una funzione ad un solo valore per cui ad ogni punto ω di Ω corrisponde un solo numero

b) l'insieme di S per cui $X(\omega) \leq x_i$ rappresenta un evento per ogni numero reale x_i

L'insieme di S formato dai punti ω | $X(\omega) \leq x_i$ è un evento al quale è associata una probabilità



$$P\{X(\omega) \leq x_i\} \quad \text{con } x = X(\omega)$$

permette di associare la stessa prob. all'insieme dei numeri reali $\{x : x \leq x_i\}$

c) la prob. di $X(\omega) = \pm\infty$ è nulla.

<u>Funzione di distribuzione</u> della variabile aleatoria X

$$F_X(x) \triangleq P\{X \leq x\}$$

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

3) $F_X(x)$ è monotona non decrescente $\forall x_1 \leq x_2 \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

ok

Variabili aleatorie discrete

X si dice discreta se assume un numero finito od una infinità numerabile di valori distinti $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$

es variabili discrete lancio moneta, dado

Gli eventi $\{X=x_i\}$ sono incompatibili

$$\sum_i P\{X=x_i\}=1$$

la funzione $P_i=P\{X=x_i\}$ è detta funzione massa di probabilità

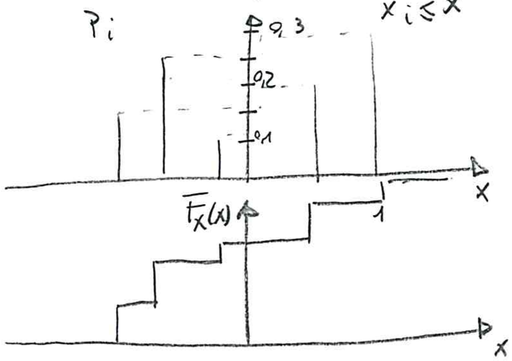
es

lancio dado $P\{\omega_i\}=\frac{1}{6}$

Ogni evento $\{X\leq x\}$ è esprimibile come somma di tutti gli eventi incompatibili $\{X=x_i\}$ per i quali $x_i\leq x$, per cui dalla massa di probabilità si ottiene la funzione di distribuzione

$$F_X(x)=\sum_{x_i\leq x} P\{X=x_i\}=\sum_i P\{X=x_i\}\, u(x-x_i)$$

es



costruire la funzione di distribuzione nel caso del lancio del dado

Variabile aleatoria continua

si dice continua se può assumere un'infinità di valori ($x \in \mathbb{R}$ $x \in [a,b]$).

ogni valore ha probabilità nulla $\quad P\{X=x\}=0 \quad$ N.B. $P\{X=x\}=F_X(x^+)-F_X(x^-)$

Se $F_X(x)$ è derivabile si definisce la densità di probabilità di X la funzione:

$$f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad (1)$$

1) $f_X(x) \geq 0$ $\quad$ infatti $F_X(x)$ è non decrescente

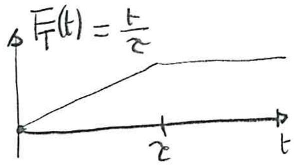
2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha$ $\quad$ (si integra la definizione (1) con $F_X(-\infty)=0$)

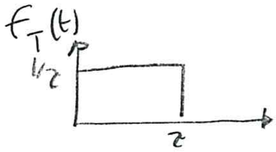
3) $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = F_X(x_2)-F_X(x_1)$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

es) una chiamata telefonica può avvenire tra 0 e τ, la probabilità dell'evento T telefonata tra t_1 e t_2 $\quad P\{t_1 \leq T \leq t_2\} = \frac{t_2-t_1}{\tau}$

è continua infatti assume ogni valore tra 0 e τ $\quad P\{T=t\}=0$





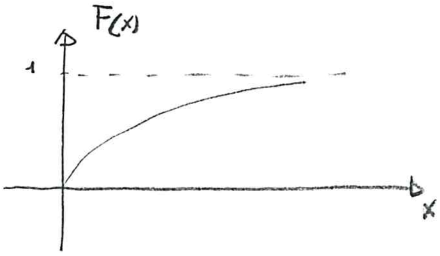
es) Funzione di distribuzione

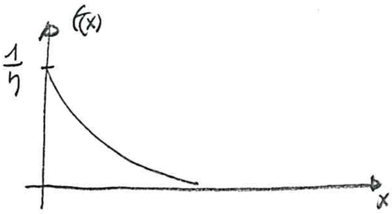
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<0 \\ 1-e^{-x/\eta} & x \geq 0 \end{cases}$$

η numero reale positivo

verificare che $0 \leq F_X(x) \leq 1$ $\quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2)-F_X(x_1)$ $\quad F_X(x)$ non decrescente

$$f(x) = \frac{1}{\eta} e^{-x/\eta}$$





16/11/07

(4)

Variabili discrete

Si può estendere alle discrete il formalismo della funzione densità di probabilità

Si utilizza la funzione generalizzata $\delta(x)$

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, g(x)\, dx = g(x_0)$

consideriamo una v.a. discreta che assume i valori x_i con prob. p_i

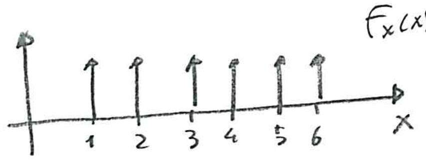
$$f_X(x) = \sum_i p_i\, \delta(x-x_i)$$

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f_X(x)\, dx = \sum_i p_i \int_a^b \delta(x-x_i)\, dx$$

valida anche se a e b non coincidono con x_i, visto che l'integrale da valore $\neq 0$ solo se a,b contiene x_i

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{6} p_i\, \delta(x-x_i)$$

per il dado



Trasformazioni di variabili casuali

Detta X variabile casuale definita su un esperimento e sia $g(x)$ una funzione della variabile reale.
Si può definire per lo stesso esperimento una nuova variabile $Y = g(X)$

evento $\{Y=y\}$ che può essere scritto anche $\{g(X)=y\}$

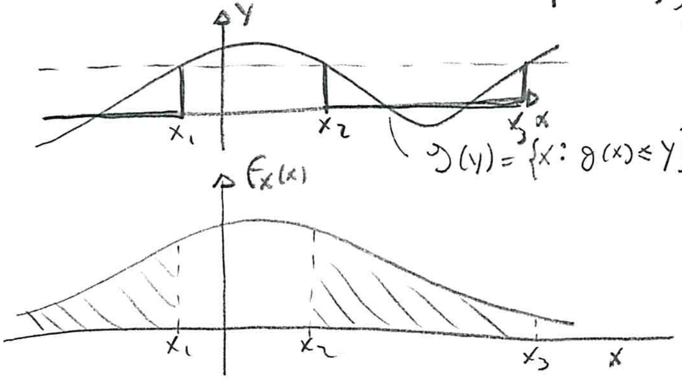
l'evento $\{Y \leq y\}$ può scriversi anche $\{g(X) \leq y\}$ è costituita da tutti i risultati per i quali la X assume i valori $x : g(x) \leq y$
che può dedursi dalla legge di distribuzione di X.

$$F_Y(y) \triangleq P\{Y \leq y\} = P\{x : g(x) \leq y\}$$

si chiama $\mathcal{J}(y) = \{x : g(x) \leq y\}$

da questa si ottiene $f_Y(y) = \dfrac{d\,F_Y(y)}{dy}$

se è nota $f_X(x)$ $\qquad F_Y(y) = \displaystyle\int_{\mathcal{J}(y)} f(x)\,dx$

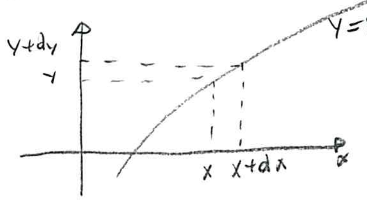


$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\int_{\mathcal{J}(y)} f_X(x)\,dx$$

M. B.
Funzioni discrete

caso b
X e $Y = g(X)$ continue

$\boxed{es}$ $g(x)$ monotona crescente $\Rightarrow$ $y = g(x)$ ha una sola soluzione



gli eventi $\{y < Y \leq y+dy\}$ e $\{x < X \leq x+dx\}$ sono uguali perché sono costituiti dagli stessi risultati

$$f_Y(y)\,dy = f_X(x)\,dx$$

visto che $\quad dy = g'(x)\,dx \qquad f_Y(y) = \left.\dfrac{f_X(x)}{g'(x)}\right|_{x=g^{-1}(y)}$

se $g(x)$ monotona decrescente $\qquad f_Y(y) = \left.\dfrac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x=g^{-1}(y)}$

$\downarrow$
$g(x)$ qualunque

se Y assume valori discreti $y_1, y_2, \dots y_K$

$$P\{Y=y_K\}$$

1) X discreta

$\{g(x)=y_K\}$ $\equiv$ somma di tutti gli eventi $\{X=x_i\}$

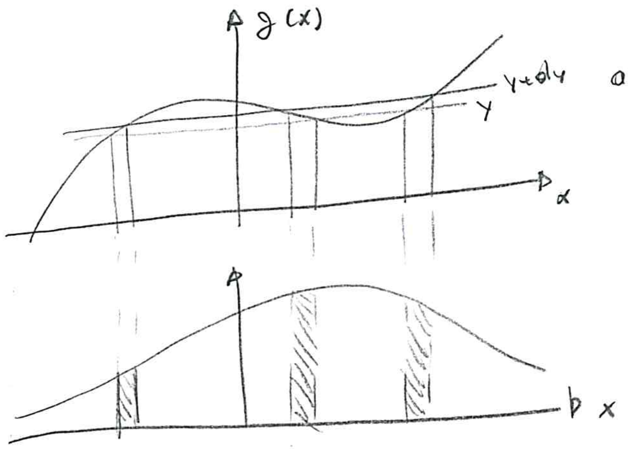
per i quali $y_K = g(x_i)$

$G(y_K) \triangleq \{x_i : g(x_i)=y_K\}$

$$P\{Y=y_K\}=\sum_{G(y_K)} P\{X=x_i\}$$

es $\quad Y=X^2 \qquad P\{Y=4\} = P\{X^2=4\}= P\{X=2\}+P\{X=-2\}$

- - - - - - - - - - - - - - -



ad un valore della y corrispondono i valori x_1, x_2 della X

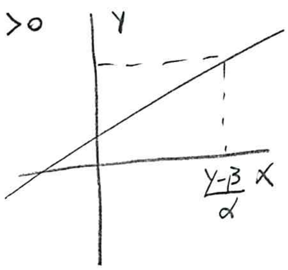
$$\{y< Y\leq y+dy\}=\{x_1 < X\leq x_1+dx_1\}+\dots+\{x_K < X\leq x_K+dx_K\}$$

$$f_Y(y)=\sum_{G(y)} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \qquad (3)$$

dove la somma è estesa a tutti gli x_i per cui $g(x_i)=y$

$\boxed{\text{ES}}$ $\quad Y=\alpha X+\beta$

$\alpha>0$



$G(y)=\{x: g(x)\leq y\} \qquad x\leq \frac{y-\beta}{\alpha}$

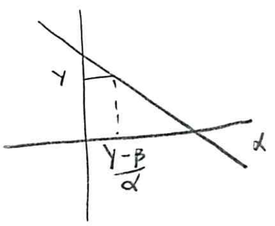
$$F_Y(y)=P\left\{x\leq \frac{y-\beta}{\alpha}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-\beta}{\alpha}} f_X(x)\,dx = F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{\alpha}f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

se $\alpha<0$

$G(y) \quad x\geq \frac{y-\beta}{\alpha} \qquad F_Y(y)=P\left\{x\geq \frac{y-\beta}{\alpha}\right\}=1-P\left\{x<\frac{y-\beta}{\alpha}\right\}=$

$$=1-\int_{-\infty}^{\frac{y-\beta}{\alpha}} f_X(x)\,d\alpha = 1-F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$



$$f_Y(y)=-\frac{1}{\alpha}f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \qquad f_Y(y)=\frac{1}{|\alpha|}f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

oppure con (3) $\quad x=\frac{y-\beta}{\alpha} \quad g'(x)=\alpha$

$$f_Y(y)=\frac{1}{|\alpha|}f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

Distribuzioni Continue (ok)

Variabile uniforme:

X uniforme nell'intervallo (a,b) con $X \in \mathcal{U}(a,b)$

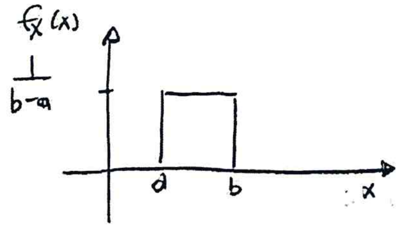
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a<x<b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

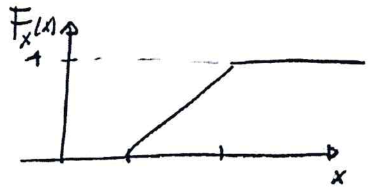
$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x-\eta_x)^2\} = E\{x^2+\eta_x^2-2\eta_x x\} = E\{x^2\} + E\{\eta_x^2\} - 2\eta_x E\{x\} =$$

$$= E\{x^2\} - \eta_x^2 = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} - \frac{b^2+a^2+2ab}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$





Variabili normali (o gaussiane)

$x \in N(\eta, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

η, σ^2 parametri della distribuzione

Funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx$$